PTS

CODUL HAMMING GRUP CORECTOR DE O EROARE

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov

1 Codarea codurilor grup cu ajutorul matricei generatoare G

Vom defini o *matrice generatoare* G, care satisface relația:

$$v = iG$$

Pentru determinarea relației dintre matricea G și matricea H, vom înlocui pe v din relația:

$$Hv^T = 0$$

Rezultă:

$$H(iG)^T = HG^T i^T = 0$$

Această relaţie este valabilă pentru orice simboluri de informaţie:

$$\boxed{HG^T = 0}$$

Dar $H = [I_m \;\; Q]$

O matrice de forma $G = [Q^T \;\; I_k]$ satisface relaţia de mai sus:

$$HG^T = [I_m \;\; Q] \begin{bmatrix} Q \\ I_k \end{bmatrix} = [Q + Q] = 0$$

Vom nota cu P matricea Q^T

$$P = Q^T$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{km} \end{bmatrix}$$

Rezultă:

$$G = [P \;\; I_k]$$

$$G = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & . & . & \dots & . \\ p_{k1} & \dots & p_{km} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Cu toate aceste notații și relații:

$$v = [c \;\; i] = i[P \;\; I_k] = [iP \;\; i]$$

de unde rezultă:

$$c = iP$$

Relația de mai sus ne permite calculul simbolurilor de control în funcție de simbolurile de informație

$$c = [a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+k}] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{km} \end{bmatrix}$$

Simbolurile de control a_j fiind:

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} a_{m_i} p_{ij}$$

Formarea corectorilor

Corectorul z^T se calculează conform relației deja stabilite:

$$z^T = v'H^T$$

$$z^T = [c' \;\; i'][I_m \;\; P^T]^T$$

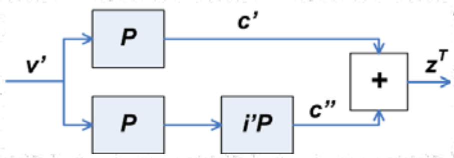
unde c' este șirul simbolurilor de control recepționate, iar i' este șirul simbolurilor de informație recepționate

$$z^T = [c' \;\; i'] \begin{bmatrix} I_m \\ P \end{bmatrix} = [c' + i'P]$$

Vom nota cu $c" = i'P$ simbolurile de control ce rezultă din operația de codificare a simbolurilor de informație recepționate

Rezultă:

$$z^T = [c' + c"]$$



2 Codul Hamming grup corector de o eroare

Pentru corecția unei singure erori, numărul corectorilor 2^m trebuie să fie egal cu $n+1$ sau mai mare, pentru a putea indica o eroare într-unul din cele n simboluri ale cuvântului recepționat sau pentru a indica că nu sunt erori

$$2^m \geq n+1$$

$$2^m \geq k+m+1$$

Codul Hamming este caracterizat de o matrice de control H, în care coloana h_i este reprezentarea binară a indicelui i

$$H = [h_1 \;\; h_2 \;\; h_3 \ldots h_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & 0 & 1 & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se respectă condiția ca $h_i + h_j \neq 0$ pentru $\forall i \neq j$

Cuvântul eroare ε, în cazul unei singure erori, este de forma:

Titlul
Codarea codurilor gr...
Codul Hamming gr...
Page 11 of 22
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

$$\varepsilon = [\ldots \alpha_i \ldots]$$

Dacă se trasmite un cuvânt v_j se recepționează v'_j:

$$v'_j = v_j + \varepsilon$$

Corectorul corespunzător va fi:

$$z = Hv' j^T = H\varepsilon^T$$

$$z = [h_1 \;\; h_2 \;\; \ldots h_i \ldots \;\; h_n] \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ \alpha_i \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} = h_i$$

Titlul
Codarea codurilor gr...
Codul Hamming gr...
Page 12 of 22
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Corectorul este reprezentarea binară a numărului i care indică poziția în care există o eroare

Codul Hamming poate corecta toate erorile simple însă nu poate corecta nici o eroare dublă

Codurile care pot corecta e erori în orice poziție, dar nu pot corecta nici o configurație particulară de $e+1$ erori sau mai multe se numesc **coduri perfecte**

Codarea codului Hamming

Pentru simplificarea calculelor, cele m poziții ale simbolurilor de control se aleg a.î. să corespundă coloanelor h_i cu o singură valoare de 1

Aceste poziții sunt: $2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{m-1}$

Vom nota simbolurile de control cu c_i, iar cele de informație cu i_j

Un cuvânt de cod va avea următoarea formă:

$$v = [c_1 \;\; c_2 \;\; i_3 \;\; c_4 \;\; i5 \;\; \dots \;\; i_n]$$

Acest cod nu este un cod sistematic!

Simbolurile de control se calculează pornind de la relația:

$$Hv^T = 0$$

$$[h_1 \;\; h_2 \;\; \dots \;\; h_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ i_3 \\ . \\ . \\ . \\ i_n \end{bmatrix} = 0$$

sau

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i_3 \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + i_n \begin{bmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Această relație este echivalentă cu un sistem de m ecuații cu necunoscutele $c_1, c_2, c_4 \dots$ care intervin doar o singură dată $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} c_1 = i_3 + i_5 + \dots + i_n \\ c_2 = i_3 + i_6 + \dots + i_n \\ c_4 = i_5 + i_6 + \dots + i_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

Titlul
Codarea codurilor gr...
Codul Hamming gr...

Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Decodarea codului Hamming

La recepție se calculează corectorul cu relația:

$$z = Hv'^T = \begin{bmatrix} e_1 \\ . \\ . \\ . \\ e_m \end{bmatrix} = [h_1 \;\; h_2 \;\; \ldots \;\; h_n] \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ i'_3 \\ . \\ . \\ . \\ i'_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e_m = c'_1 + i'_3 + i'_5 + \ldots + i'_n \\ e_{m-1} = c'_2 + i'_3 + i'_6 + \ldots + i'_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

Numărul binar astfel calculat $(e_1 \; e_2 \; \ldots \; e_m)$ se introduce

într-un decodificator, la ieșirea căruia se obține un semnal care indică poziția erorii, făcând posibilă corecția ei

Exemplu

Să considerăm o sursă de informaţie care generează cuvinte pe 4 biţi $\rightarrow k = 4$. Rezultă că $m = 3$ şi $n = 7$

Matricea de control H este:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

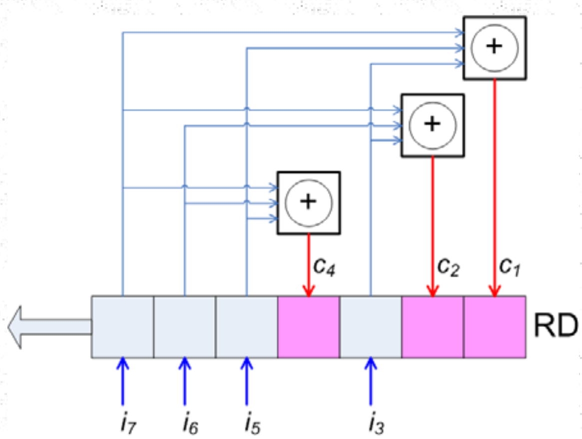
Cuvintele de cod vor fi de forma:

$$v = [c_1 \; c_2 \; i_3 \; c_4 \; i_5 \; i_6 \; i_7]$$

Simbolurile de control se vor calcula folosind relaţiile:

$$\begin{cases} c_1 = i_3 + i_5 + i_7 \\ c_2 = i_3 + i_6 + i_7 \\ c_4 = i_5 + i_6 + i_7 \end{cases}$$

Titlul
Codarea codurilor gr...
Codul Hamming gr...
Page 19 of 22
Full Screen
Search
Close
PTS 2008



RD = registru de deplasare,
+ = sumator modulo 2

Titlul
Codarea codurilor gr...
Codul Hamming gr...
Page 20 of 22
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

La recepție, calculul corectorilor se face după relațiile:

$$\begin{cases} e_1 = c'_4 + i'_5 + i'_6 + i'_7 \\ e_2 = c'_2 + i'_3 + i'_6 + i'_7 \\ e_3 = c'_1 + i'_3 + i'_5 + i'_7 \end{cases}$$

Corectorul $(e_1\ e_2\ e_3)$ va fi introdus în decodificatorul D care va indica poziția bitului eronat