

PTS

CODURI GRUP (cont.)

Mihai Ivanovici

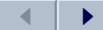
Universitatea Transilvania din Braşov



Titlul

Coduri Grup

Page 1 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

1 Coduri Grup

Codarea codurilor grup cu ajutorul matricei de control H

Forma cuvântului de cod este:

$$v = [a_1 \dots a_m a_{m+1} \dots a_n]$$

Primele m simboluri sunt simboluri redundante, numite *simboluri de control* ce servesc detecției sau corecției de erori:

$$c = [a_1 a_2 \dots a_m]$$



Titlul

Coduri Grup

Page 2 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Ultimele k simboluri sunt *simboluri de informație*,
generate de sursă

$$i = [a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+k}]$$

$$m + k = n$$

Forma cuvântului de cod devine:

$$v = [c \ i]$$

Pentru a determina cele m simboluri de control în funcție
de cele k simboluri de informație:



Titlul

Coduri Grup

Page 3 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$Hv^T = 0$$

$$Hv^T = [I_m \ Q] \begin{bmatrix} c^T \\ i^T \end{bmatrix}$$

$$c^T + Qi^T = 0$$

$$c^T = Qi^T$$

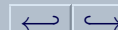
Codarea reprezintă operația de determinare a simbolurilor de control în funcție de simbolurile de informație



Titlul

Coduri Grup

Page 4 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m+1} \\ a_{m+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$a_j = \sum_{i=1}^k q_{ji} a_{m+i} \quad j = \overline{1, m}$$

Simbolurile de control se obțin din combinații liniare ale simbolurilor de informație (prin însumare modulo doi)

Proprietate: cuvintele de cod astfel formate au corectorul corespunzător egal cu zero. Dacă din cauza zgomotului se introduc erori, corectorul este diferit de zero



Titlul

Coduri Grup

Page 5 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Dacă simbolurile de informație sunt simboluri succesive plasate la începutul (sau la sfârșitul) cuvântului de cod **codul** este *sistematic*



Titlul

Coduri Grup

Page 6 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Relații între coloanele matricei H în cazul corecției erorilor

Pt. a determina condițiile pe care trebuie să le satisfacă matricea H în cazul în care dorim să fie corectate toate combinațiile de e erori, vom considera următoarele:

$$v' = v + \varepsilon$$

unde ε este un cuvânt eroare cu e simboluri egale cu 1, respectiv cu e erori:

$$\varepsilon = [\dots \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_e} \dots]$$

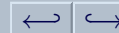
Corectorul corespunzător cuvântului v' este:



Titlul

Coduri Grup

Page 7 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$z = Hv'^T = H(v + \varepsilon)^T = Hv^T + H\varepsilon^T$$

$$\text{dar fiindcă } Hv^T = 0 \implies z = H\varepsilon^T$$

$$z = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_e} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

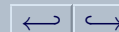
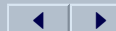
Vom nota coloanele matricei H cu h_1, h_2, \dots, h_n :



Titlul

Coduri Grup

Page 8 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$z = [h_1 h_2 \dots h_n] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_e} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$z = [\dots \alpha_{i_1} h_{i_1} + \dots + \alpha_{i_e} h_{i_e} + \dots]$$

Deoarece $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_e} = 1 \implies$

$$z = [h_{i_1} + \dots + h_{i_e}]$$



Titlul

Coduri Grup

Page 9 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Pentru a corecta e erori indiferent de pozițiile în care intervin, este necesar ca sumele modulo 2 a câte e coloane oarecare din matricea H să fie distincte

Astfel, se obțin corectori distincți pentru fiecare cuvânt eroare care conține e erori. În caz contrar, se ajunge la situația că e erori care intervin în poziții diferite vor da naștere aceluiași corector z , iar corecția nu mai este posibilă

Dacă coloanele matricii H sunt astfel alese încât sumele modulo 2 a câte e coloane sunt distincte:

$$h_{i_1} + \dots + h_{i_e} \neq h_{j_1} + \dots + h_{j_e}$$

pentru orice valori distincte i_1, \dots, i_e , respectiv j_1, \dots, j_e cuprinse între 1 și n



Titlul

Coduri Grup

Page 10 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$h_{i_1} + \dots + h_{i_e} + h_{j_1} + \dots + h_{j_e} \neq 0$$

$$h_{i_1} + \dots + h_{i_{2e}} \neq 0$$

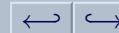
pentru orice valori i_1, \dots, i_{2e} cuprinse între 1 și n



Titlul

Coduri Grup

Page 11 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Relații între coloanele matricei H în cazul deteției erorilor

Atunci când se dorește să se facă doar deteția erorilor, vom pune o condiție mai puțin restrictivă pentru corectorii z : să fie diferiți de zero, dar nu neapărat distincți

Vom presupune că vrem să detectăm d erori, iar cuvântul eroare este de forma:

$$\varepsilon = [\dots \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_d} \dots]$$

$$H' \varepsilon^T \neq 0$$

Notând coloanele matricei H' cu $h'_1, h'_2, \dots, h'_n \implies$



Titlul

Coduri Grup

Page 12 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$[h'_1 h'_2 \dots h'_n] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_d} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \neq 0$$

$$h'_{i_1} + \dots + h'_{i_d} \neq 0$$

pentru orice i_1, \dots, i_d distincți cuprinși între 1 și n

În cazul detecției unei singure erori, matricea H' trebuie să aibă toate coloanele diferite de zero



Titlul

Coduri Grup

Page 13 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Coloanele matricii H' pot fi egale între ele

Detecția a $d = 2e$ erori este echivalentă cu corecția a e erori și invers

Dacă numărul erorilor care trebuie să fie detectate este impar: $d = 2p + 1$ $p = 0, 1, \dots$

matricea de control H' poate fi determinată dacă se impune condiția:

$$h'_{i_1} + \dots + h'_{i_{2p+1}} \neq 0$$

Relația este satisfăcută dacă:

$$h'_{i_1} = \begin{bmatrix} h_{i_1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h'_{i_2} = \begin{bmatrix} h_{i_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$$



Titlul

Coduri Grup

Page 14 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$H' = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dar suma modulo 2 a unui număr par de simboluri 1 este nulă:

$$\begin{bmatrix} h_{i_1} + \dots + h_{i_{2p}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{i_{2p+1}} \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Relația este satisfăcută pentru orice valori ale coloanelor h_1, h_2, \dots, h_n , în particular și pentru valori nule

Dacă singura condiție care se impune codului este de a detecta erorile impare, matricea H' poate avea forma:

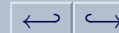
$$H' = [1, 1, \dots, 1]$$



Titlul

Coduri Grup

Page 15 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

În acest caz, pentru cuvântul de cod:

$$v = [a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n]$$

ultimele $k = n - 1$ simboluri reprezintă simboluri de informație, iar primul simbol a_1 reprezintă *simbolul de verificare a parității*, determinat de relația $H'v^T = 0$, adică:

$$a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Dacă la recepție $H'v'^T \neq 0$, respectiv:

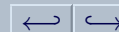
$$a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{n-1} + a'_n \neq 0$$



Titlul

Coduri Grup

Page 16 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

se poate afirma că în procesul de transmisiune s-a introdus un număr impar de erori

Prin adăugarea unui simbol de control al parității, pe lângă simbolurile de corecție, se obține o informație suplimentară asupra erorilor și anume informația că sunt în număr par sau impar

În acest caz matricea de control este de forma:

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

cuvântul de cod având astfel $n + 1$ simboluri

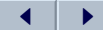
Corectorul este:



Titlul

Coduri Grup

Page 17 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

$$z = H'v^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

unde $c_2 \in GF(2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & + & a'_1 h_1 & + & \dots & + & a'_n h_n \\ a'_0 & + & a'_1 & + & \dots & + & a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = z$$



Titlul

Coduri Grup

Page 18 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Se consideră că vectorii h_1, h_2, \dots, h_n (coloane din matricea H) îndeplinesc condițiile necesare corecției unei erori

În această ipoteză considerăm următoarele cazuri:

- $c_1 = 0$ și $c_2 = 0$ - decidem că nu sunt erori
- $c_1 \neq 0$ și $c_2 = 1$ - decidem că există o eroare corectabilă
- $c_1 = 0$ și $c_2 = 1$ - decidem că simbolul a'_0 este eronat
- $c_1 \neq 0$ și $c_2 = 0$ - decidem că există două erori necorectabile



Titlul

Coduri Grup

Page 19 of 19



Full Screen

Search

Close

PTS 2008