PTS

CODURI GRUP (cont.)

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov

Titlul
Coduri Grup
Page 1 of 19
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

1 Coduri Grup

Codarea codurilor grup cu ajutorul matricei de control H

Forma cuvântului de cod este:

$$v = [a_1 \dots a_m a_{m+1} \dots a_n]$$

Primele m simboluri sunt simboluri redundante, numite *simboluri de control* ce servesc detecției sau corecției de erori:

$$c = [a_1 a_2 \dots a_m]$$

Titlul
Coduri Grup
Page 2 of 19
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Ultimele k simboluri sunt *simboluri de informaţie*, generate de sursă

$$i = [a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+k}]$$

$$m + k = n$$

Forma cuvântului de cod devine:

$$v = [c \;\; i]$$

Pentru a determina cele m simboluri de control în funcţie de cele k simboluri de informaţie:

$$Hv^T = 0$$

$$Hv^T = [I_m \;\; Q] \begin{bmatrix} c^T \\ i^T \end{bmatrix}$$

$$c^T + Qi^T = 0$$

$$c^T = Qi^T$$

Codarea reprezintă *operaţia de determinare a simbolurilor de control în funcţie de simbolurile de informaţie*

$$
\begin{bmatrix}
q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1k} \\
q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2k} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mk}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{m+1} \\ a_{m+2} \\ . \\ . \\ a_{m+k}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m
\end{bmatrix}
$$

$$
a_j = \sum_{i=1}^{k} q_{ji} a_{m+i} \quad j = \overline{1,m}
$$

Simbolurile de control se obţin din combinaţii liniare ale simbolurilor de informaţie (prin însumare modulo doi)

Proprietate: cuvintele de cod astfel formate au corectorul corespunzător egal cu zero. Dacă din cauza zgomotului se introduc erori, corectorul este diferit de zero

Dacă simbolurile de informaţie sunt simboluri succesive plasate la începutul (sau la sfârşitul) cuvântului de cod **codul** este *sistematic*

Relații între coloanele matricei H în cazul corecției erorilor

Pt. a determina condițiile pe care trebuie să le satisfacă matricea H în cazul în care dorim să fie corectate toate combinațiile de e erori, vom considera următoarele:

$$v' = v + \varepsilon$$

unde ε este un cuvânt eroare cu e simboluri egale cu 1, respectiv cu e erori:

$$\varepsilon = [\ldots \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_e} \ldots]$$

Corectorul corespunzător cuvântului v' este:

$$z = Hv'^T = H(v+\varepsilon)^T = Hv^T + H\varepsilon^T$$

dar fiindcă $Hv^T = 0 \Longrightarrow z = H\varepsilon^T$

$$z = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m1} & h_{m2} & \ldots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . \\ . \\ \alpha_{i_1} \\ . \\ . \\ \alpha_{i_e} \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

Vom nota coloanele matricii H cu $h_1, h_2, \ldots, h_n$:

$$z = [h_1 h_2 \dots h_n] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_e} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$z = [\dots \alpha_{i_1} h_{i_1} + \dots + \alpha_{i_e} h_{i_e} + \dots]$$

Deoarece $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_e} = 1 \Longrightarrow$

$$z = [h_{i_1} + \dots + h_{i_e}]$$

Pentru a corecta e erori indiferent de pozițiile în care intervin, este necesar ca sumele modulo 2 a câte e coloane oarecare din matricea H să fie distincte

Astfel, se obțin corectori distincți pentru fiecare cuvânt eroare care conține e erori. În caz contrar, se ajunge la situația că e erori care intervin în poziții diferite vor da naștere aceluiași corector z, iar corecția nu mai este posibilă

Dacă coloanele matricii H sunt astfel alese încât sumele modulo 2 a câte e coloane sunt distincte:

$$h_{i_1} + \dots + h_{i_e} \neq h_{j_1} + \dots + h_{j_e}$$

pentru orice valori distincte $i_1, \dots, i_e$, respectiv $j_1, \dots, j_e$ cuprinse între 1 și n

$$h_{i_1} + \ldots + h_{i_e} + h_{j_1} + \ldots + h_{j_e} \neq 0$$

$$h_{i_1} + \ldots + h_{i_{2e}} \neq 0$$

pentru orice valori $i_1, \ldots, i_{2e}$ cuprinse între 1 și n

Relații între coloanele matricei H în cazul deteției erorilor

Atunci când se dorește să se facă doar deteția erorilor, vom pune o condiție mai puțin restrictivă pentru corectorii z: să fie diferiți de zero, dar nu neapărat distincți

Vom presupune că vrem să detectăm d erori, iar cuvântul eroare este de forma:

$$\varepsilon = [\ldots \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_d} \ldots]$$

$$H' \varepsilon^T \neq 0$$

Notând coloanele matricii H' cu $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n \Longrightarrow$

Titlul
Coduri Grup
Page 12 of 19
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

$$[h'_1 h'_2 \dots h'_n] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i_d} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \neq 0$$

$$h'_{i_1} + \dots + h'_{i_d} \neq 0$$

pentru orice $i_1, \dots, i_d$ distincți cuprinși între 1 și n

În cazul detecției unei singure erori, matricea H' trebuie să aibă toate coloanele diferite de zero

Coloanele matricii H' pot fi egale între ele

Detecția a $d = 2e$ erori este echivalentă cu corecția a e erori și invers

Dacă numărul erorilor care trebuie să fie detectate este impar: $d = 2p + 1 \quad p = 0, 1, \dots$

matricea de control H' poate fi determinată dacă se impune condiția:

$$h'_{i_1} + \dots h'_{i_{2p+1}} \neq 0$$

Relația este satisfăcută dacă:

$$h'_{i_1} = \begin{bmatrix} h_{i_1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h'_{i_2} = \begin{bmatrix} h_{i_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$H' = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dar suma modulo 2 a unui număr par de simboluri 1 este nulă:

$$\begin{bmatrix} h_{i_1} + \dots + h_{i_{2p}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{i_{2p+1}} \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Relația este satisfăcută pentru orice valori ale coloanelor $h_1, h_2, \dots h_n$, în particular și pentru valori nule

Dacă singura condiție care se impune codului este de a detecta erorile impare, matricea H' poate avea forma:

$$H' = [1, 1, \dots 1]$$

Titlul
Coduri Grup
Page 15 of 19
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

În acest caz, pentru cuvântul de cod:

$$v = [a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n]$$

ultimele $k = n - 1$ simboluri reprezintă simboluri de informație, iar primul simbol a_1 reprezintă *simbolul de verificare a parității*, determinat de relația $H'v^T = 0$, adică:

$$a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Dacă la recepție $H'v'^T \neq 0$, respectiv:

$$a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{n-1} + a'_n \neq 0$$

Titlul
Coduri Grup
Page 16 of 19
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

se poate afirma că în procesul de transmisiune s-a introdus un număr impar de erori

Prin adăugarea unui simbol de control al parității, pe lângă simbolurile de corecție, se obține o informație suplimentară asupra erorilor și anume informația că sunt în număr par sau impar

În acest caz matricea de control este de forma:

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

cuvântul de cod având astfel $n+1$ simboluri

Corectorul este:

$$z = H' v'^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

unde $c_2 \in GF(2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ . \\ . \\ . \\ a'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & + & a'_1 h_1 & + & \dots & + & a'_n h_n \\ a'_0 & + & a'_1 & + & \dots & + & a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = z$$

Se consideră că vectorii $h_1, h_2, \dots h_n$ (coloane din matricea H) îndeplinesc condițiile necesare corecției unei erori

În această ipoteză considerăm următoarele cazuri:

- $c_1 = 0$ și $c_2 = 0$ - decidem că nu sunt erori
- $c_1 \neq 0$ și $c_2 = 1$ - decidem că există o eroare corectabilă
- $c_1 = 0$ și $c_2 = 1$ - decidem că simbolul a_0' este eronat
- $c_1 \neq 0$ și $c_2 = 0$ - decidem că există două erori necorectabile