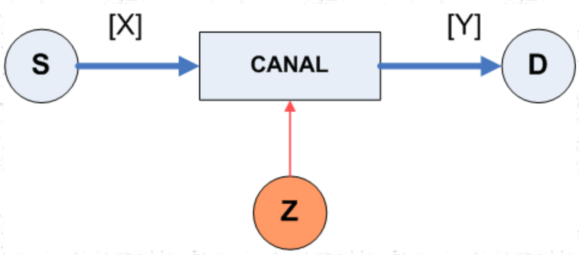
PTS

CANALE DISCRETE (cont.)

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov

1 Canale discrete



Entropia la intrarea și ieșirea din canal

- $H(X)$ - entropia câmpului de evenimente de la intrare
- $H(Y)$ - entropia câmpului de evenimente de la ieșire

- $H(X,Y)$ - entropia câmpului reunit intrare-ieşire

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) log p(x_i)$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j) log p(y_j)$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) log p(x_i,y_j)$$

Entropia condiţionată

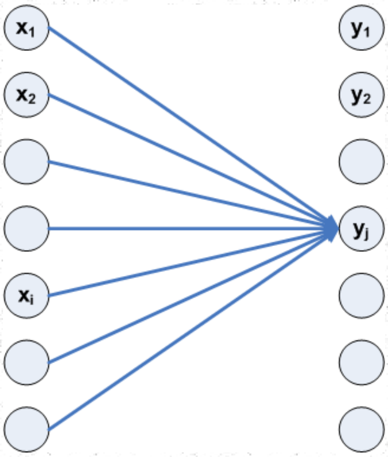
Dacă câmpul de evenimente la ieşirea din canal este cunoscut, din cauza zgomotului rămâne totuşi o incertitudine asupra câmpului de la intrare.

Valoarea medie a acestei incertitudini se numeşte **entropia câmpului X condiţionată de câmpul Y** notată cu $H(X/Y)$ şi reprezintă *o incertitudine reziduală medie*

Vom considera umrătoarele:

- dacă la ieşirea din canal apare simbolul y_j există o incertitudine asupra simbolului transmis la intrarea în canal

- acesta poate să fie x_1, x_2 sau oricare din simbolurile de la intrare



Incertitudinea asupra realizării evenimentului x_i dacă s-a realizat y_j este:

$$U(x_i/y_j) = -logp(x_i/y_j)$$

Valoarea medie a acestei incertitudini (entropia asociată cu recepționarea simbolului y_j) este:

$$H(X/y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)U(x_i/y_j) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)logp(x_i/y_j)$$

Valoarea medie a acestei entropii pentru toate valorile posibile ale lui y_j este:

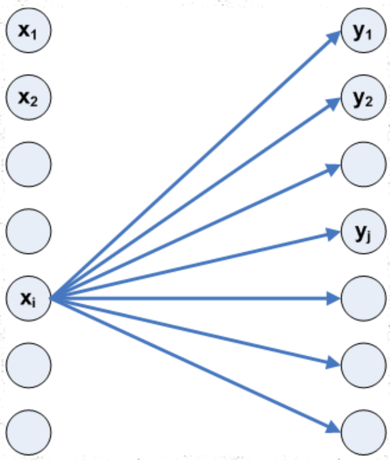
$$H(X/Y) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j)H(X/y_j)$$

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(y_j)p(x_i/y_j)logp(x_i/y_j)$$

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)logp(x_i/y_j)$$

Entropia $H(X/Y)$ se numeşte **echivocaţie** fiindcă este *o măsură a echivocului ce există asupra câmpului de la intrare când se cunoaşte câmpul la ieşire*

Similar, se poate determina entropia câmpului la ieşire dacă se cunoaşte câmpul la intrare:



$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) log p(y_j/x_i)$$

Entropia $H(Y/X)$ se numește **eroare medie** fiindcă este *o măsură a incertitudinii câmpului de la ieșire când se cunoaște câmpul de la intrare*

- Dacă nu există zgomot: prin recepționarea simbolului y_j există certitudinea asupra simbolului transmis x_i, atunci $p(x_i/y_j) = 1$ și $\Longrightarrow$:

$$H(X/Y) = H(Y/X) = 0$$

- Dacă zgomotul este foarte puternic, a.î. câmpul de la intrare este independent de câmpul de la ieșire:

$p(x_i/y_j) = p(x_i)$ și $p(y_j/x_i) = p(y_j)$ atunci:

$$H(X/Y) = H(X)$$

$$H(Y/X) = H(Y)$$

Pentru determinarea entropiilor condiționate este necesar să se cunoască probabilitățile condiționate:

$$[P(X/Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1/y_1) & p(x_2/y_1) & \dots & p(x_n/y_1) \\ p(x_1/y_2) & p(x_2/y_2) & \dots & p(x_n/y_2) \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ p(x_1/y_m) & p(x_2/y_m) & \dots & p(x_n/y_m) \end{bmatrix}$$

$$[P(Y/X)] = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \dots & p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \dots & p(y_m/x_2) \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ p(y_1/x_n) & p(y_2/x_n) & \dots & p(y_m/x_n) \end{bmatrix}$$

Relaţii între entropii

- $P(X)$ - matricea probabilităţilor alfabetului la intrare
- $P(Y)$ - matricea probabilităţilor alfabetului la ieşire
- $P(X,Y)$ - matricea probabilităţilor alfabetelor reunite intrare-ieşire
- $P(X/Y)$ - matricea probabilităţilor condiţionate (intrare de ieşire)
- $P(Y/X)$ - matricea probabilităţilor condiţionate (ieşire de intrare)
- $H(X)$ - entropia alfabetului la intrarea în canal
- $H(X)$ - entropia alfabetului la ieşirea din canal
- $H(X,Y)$ - entropia alfabetelor de la intrare şi de la ieşire reunite

- $H(X/Y)$ - echivocația
- $H(Y/X)$ - eroarea medie

Vom porni de la relația de definiție a entropiei câmpurilor reunite:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)logp(x_i,y_j)$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)logp(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)logp(y_j/x_i)$$

sau:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n} logp(x_i)\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)logp(y_j/x_i)$$

Rezultă:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X)$$

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y)$$

- Dacă canalul nu are zgomot, există o relație biunivocă între $[X]$ și $[Y]$, și deci echivocația și eroarea medie sunt nule $\Longrightarrow$

$$H(X,Y) = H(X) = H(Y)$$

- Dacă zgomotul este foarte puternic:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

În plus:

$$H(X) \geq H(X/Y)$$

$$H(Y) \geq H(Y/X)$$

Egalitatea are loc atunci când X şi Y sunt independente

Transinformaţia

Informaţia mutuală asupra evenimentului x_i când la ieşirea canalului se observă evenimentul y_j este:

$$i(x_i, y_j) = log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

În absenţa zgomotului:

$$p(x_i/y_j) = 1 \Longrightarrow i(x_i; y_j) = -log p(x_i)$$

Informaţia mutuală este egală cu informaţia proprie

În cazul general, din cauza zgomotului $p(x_i/y_j) < 1$, iar informaţia mutuală ¡ decât informaţia proprie:

$$i(x_i;y_j) = log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} = log\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)\cdot p(y_j)} = log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$

Valoarea medie a informației mutuale se calculează considerând toate perechile posibile de simboluri intrare-ieșire $(x_i;y_j)$ și probabilitățile lor $p(x_i,y_j)$:

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i(x_i;y_j)p(x_i,y_j)$$

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)log\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)\cdot p(y_j)}$$

$$I(X;Y) =$$
$$-\sum_{i=1}^{n} logp(x_i)\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) - \sum_{j=1}^{m} logp(y_j)\sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_j)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)logp(x_i,y_j)$$

de unde rezultă că:

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y)$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$I(X;Y)$ este valoarea medie a informaţiei mutuale, adică a *informaţiei ce se obţine asupra alfabetului de la intrare prin recepţionarea (cunoaşterea) alfabetului de la ieşire*

$I(X;Y)$ se numeşte **transinformaţie** şi reprezintă informaţia transmisă prin canal

Transinformaţia este întotdeauna pozitivă:

$$I(X;Y) > 0$$

Dacă canalul nu are zgomot, echivocaţia $H(X/Y)$ şi eroarea medie $H(Y/X)$ sunt nule şi atunci:

$$I(X;Y) = H(X) = H(Y)$$

Dacă zgomotul este foarte puternic:

$$I(X;Y) = 0$$

Capacitatea canalului discret

Capacitatea canalului = o măsură introdusă de Shannon pt. a cuantifica eficiența cu care se transmite informația

Capacitatea canalului este prin definiție *valoarea maximă a transinformației*

$$C = max[I(X;Y)]$$

$$C = max[H(X) - H(X/Y)] = max[H(Y) - H(Y/X)]$$

Maximizarea se face în raport cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots$ cu care se presupune că sunt utilizate simbolurile $x_1, x_2, \ldots$

Valoarea maximă a transinformației are loc pentru anumite valori bine determinate ale acestor probabilități, care definesc în felul acesta o *sursă secundară*

Pentru a transmite informație printr-un canal la valoarea maximă a transinformației (adică la capacitatea canalului), *sursa primară* trebuie transformată (prin codare) într-o *sursă secundară* specificată de probabilitățile care determină valoarea maximă

Această transformare poartă numele de *adaptare statistică* a sursei la canalul de comunicație

Capacitatea canalului poate fi raportată la timp:

$$C_t = \frac{C}{\overline{\tau}} = \frac{max[I(X;Y)]}{\overline{\tau}}$$

unde $\overline{\tau}$ este durata medie a unui simbol, iar $\frac{I(X;Y)}{\overline{\tau}}$ este debitul de transinformaţie (transinformaţia pe unitatea de timp)

Redundanţă

Redundanţa canalului este definită ca fiind *diferenţa dintre capacitatea canalului şi transinformaţie*

$$R_c = C - I(X;Y)$$

Redundanţa relativă este redundanţa raportată la capacitatea canalului:

$$\rho_c = 1 - \frac{I(X;Y)}{C}$$

Eficiență

Eficiența canalului este definită ca fiind *raportul dintre transinformație și capacitatea canalului*

$$\eta_c = \frac{I(X;Y)}{C}$$

$$\eta_c = 1 - \rho_c \qquad \eta_c \leq 1$$

Eficiența canalului indică cât de mult se îndepărtează transinformația de valoarea ei maximă

Titlul
Canale discrete
Page 25 of 30
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

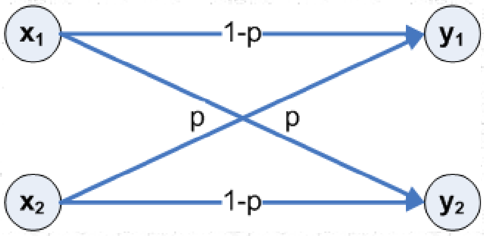
Capacitatea canalului binar simetric

Canal simetric - canalul pentru care probabilitatea de eronare a oricărui simbol este aceeași

Un canal binar oarecare este caracterizat de **matricea de zgomot**:

$$[P] = [P(Y/X)] = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) \end{bmatrix}$$

Titlul
Canale discrete
Page 26 of 30
Full Screen
Search
Close
PTS 2008



Pentru un canal binar simetric, matricea de zgomot devine:

$$[P] = [P(Y/X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

Capacitatea canalului este:

$$C = max[I(X;Y)] = max[H(Y) - H(Y/X)]$$

Eroarea medie este:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i,y_j) log p(y_j/x_i)$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i) p(y_j/x_i) log p(y_j/x_i)$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)[p(y_1/x_i) log p(y_1/x_i) + p(y_2/x_i) log p(y_2/x_i)]$$

$$\begin{gathered} H(Y/X) = \\ -p(x_1)p(y_1/x_1)logp(y1/x1) - p(x_1)p(y_2/x_1)logp(y_2/x_1) - \\ -p(x_2)p(y_1/x_2)logp(y1/x2) - p(x_2)p(y_2/x_2)logp(y_2/x_2) = \\ = -p(x_1)(1-p)log(1-p) - p(x_1)plogp - p(x_2)plogp - \\ p(x_2)(1-p)log(1-p) \end{gathered}$$

$$H(Y/X) = -[p(x_1) + p(x_2)] \cdot [plogp + (1-p)log(1-p)]$$

$$H(Y/X) = -[plogp + (1-p)log(1-p)]$$

Eroarea medie $H(Y/X)$ este constantă și *depinde numai de zgomotul de canal și nu de probabilitățile de utilizare a simbolurilor*. Proprietate valabilă *pentru toate canalele simetrice*

$$C = max[H(Y)] + plogp + (1-p)log(1-p)$$

$$maxH(Y) = 1 \text{ pentru } p(y_1) = p(y_2)$$

Din simetria canalului rezultă că dacă $p(y_1) = p(y_2)$ atunci și $p(x_1) = p(x_2)$

Valoarea maximă a transinformației se obține când simbolurile x_1 și x_2 de la intrare sunt utilizate cu aceeași probabilitate:

$$C = 1 + plogp + (1-p)log(1-p)$$

- în absența zgomotului $p = 0$ și $C = 1$
- dacă zgomotul este foarte puternic $p = \frac{1}{2}$ și $C = 0$