PTS

MĂSURA INFORMAŢIEI PENTRU SEMNALE DISCRETE

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov

Cuvânt înainte

Măsura informaţiei: o măsură a nedeterminării asupra unui sistem de evenimente, a incertitudinii asupra rezultatului alegerii printr-un mecanism aleator a unui eveniment din mulţimea evenimentelor posibile, distincte

Este o măsură obiectivă şi nu se referă la valoarea subiectivă a informaţiei

1 Măsura informației în cazul discret

Fie mulțimea X, discretă și finită, a tuturor evenimentelor posibile ale unui experiment, care poartă numele de *spațiul eșantioanelor*:

$$[X] = [x_1 x_2 \ldots x_n]$$

pentru care:

$$\bigcup_{i=1}^{n} = E \quad x_i \bigcap x_j = \varnothing$$

unde E este evenimentul sigur.

Fiecărui eveniment din spațiul eșantioanelor i se asociază o probabilitate dată de matricea:

$$[P_x] = [p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_n)]$$

Măsura incertitudinii asupra realizării unui eveniment x_i, notată cu $U(x_i)$ este o funcție $F(p_i)$ de probabilitatea apriori $p_i = p(x_i)$ de realizare a evenimentului respectiv

$$U(x_i) = F(p_i)$$

și reprezintă incertitudinea inițială (apriori) asupra realizării evenimentului x_i

Realizarea evenimentului x_i duce la anularea incertitudinii și la obținerea unei informații $i(x_i)$ asupra realizării lui x_i.

$$i(x_i) \triangleq U(x_i)$$

$$i(x_i) \triangleq F(p_i)$$

În continuare vom presupune că procesul de observare a evenimentelor x_i este afectat de zgomot. Prin urmare, între evenimentele realizare x_i și cele observate y_j nu există în mod obligatoriu o corespondență biunivocă.

Fie Y mulțimea evenimentelor observate:

Titlul
Măsura informației ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 5 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

$$[Y] = [y_1 y_2 \ldots y_n]$$

Măsura incertitudinii asupra realizării evenimentului x_i dacă s-a obervat evenimentul y_j, $U(x_i/y_j)$, este o funcție $F[p(x_i/y_j)]$ de probabilitatea lui x_i condiționată de y_j:

$$U(x_i/y_j) = F[p(x_i/y_j)]$$

Funcția F reprezintă incertitudinea *aposteriori* asupra realizării evenimentului x_i dacă s-a realizat y_j.

Titlul
Măsura informației ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 6 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

După observarea evenimentului y_j rămâne totuși o incertitudine asupra evenimentului care s-a realizat în realitate, datorată zgomotului

Informația obținută asupra realizării lui x_i când se observă y_j:

$$i(x_i; y_j) \triangleq U(x_i) - U(x_i/y_j)$$

și reprezintă diminuarea incertitudinii asupra lui x_i prin recepționarea lui y_j.

În funcție de zgomot, identificăm următoarele 2 cazuri limită:

- În lipsa zgomotului $y_j = x_i$ iar $U(x_i/y_j) = 0$

$$i(x_i; y_j) \triangleq U(x_i)$$

- Dacă zgomotul este foarte puternic și nu se poate face nici o legătură între y_j recepționat și x_i realizat (x_i și y_j sunt evenimente independente): $U(x_i/y_j) = F[p(x_i/y_j)] = F[p(x_i)] = U(x_i)$

$$i(x_i; y_j) = 0$$

(prin observarea lui y_j nu se obține nici o informație asupra lui x_i)

În cazul general:

$$i(x_i;y_j) = F[p(x_i)] - F[p(x_i/y_j)]$$

Titlul
Măsura informaţiei . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 9 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Specificarea funcţiei U

Funcţia U trebuie să aibă proprietatea de *aditivitate*, deoarece informaţia este aditivă

Considerăm că evenimentul x_i este format din 2 evenimente independente x_{i1} şi x_{i2}: $x_i = x_{i1} \bigcap x_{i2}$

Postulând că informaţia este aditivă:

$$i(x_i) = i(x_{i1}) + i(x_{i2})$$

$$U(x_i) = U(x_{i1}) + U(x_{i2})$$

Titlul
Măsura informaţiei . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 10 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

$$F[p(x_i)] = F[p(x_{i1})] + F[p(x_{i2})]$$

Deoarece evenimentele x_{i1} și x_{i2} sunt independente:

$$F[p(x_{i1}) \cdot p(x_{i2})] = F[p(x_{i1})] + F[p(x_{i2})]$$

Această ecuație funcțională are soluția:

$$\boxed{E(p) = -\lambda log p}$$

unde λ este o constantă pozitivă

$$\boxed{i(x_i) = -\lambda log p(x_i)}$$

Dacă se ia în calcul și prezența zgomotului:

$$i(x_i; y_j) = -\lambda log p(x_i) + \lambda log p(x_i/y_j)$$

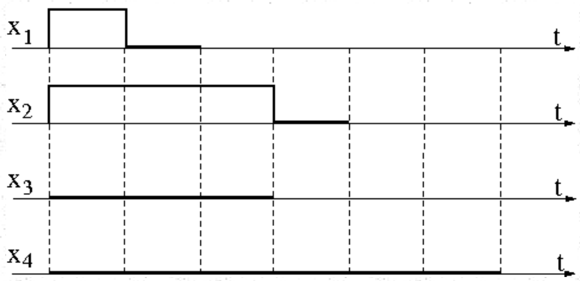
$$\boxed{i(x_i; y_j) = \lambda log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}}$$

- $i(x_i)$ - *informație proprie* asociată evenimentului x_i
- $i(x_i; y_j)$ - *informație mutuală* asociată cu x_i și y_j (obținută prin realizarea evenimentului x_i și receptionarea sau observarea evenimentului y_j)

2 Surse discrete

Sursele care debitează mesaje în formă discretă

Exemplu de mesaje în formă discretă: o succesiune de impulsuri (literele unui text transmis prin telegraf, cod Morse), orice semnal eșantionat și cuantizat.



Terminologie

Sursă discretă de informație: șir de variabile aleatoare discrete $\xi_{t1}, \xi_{t2} \ldots \xi_{tk}$

Simbol sau literă: elementul fundamental ireductibil care conține o informație, o realizare particulară a sursei de informație

Alfabet: totalitatea simbolurilor/literelor

Ex. Alfabetul codului Morse este format din 4 litere. Alfabetul unui mesaj cuantizat pe n nivele este format din $n+1$ litere.

Cuvânt: succesiune finită de simboluri

Limbaj: totalitatea cuvintelor formate cu un anumit alfabet

Codare (cifrare): stabilirea unei corespondenţe între două limbaje

Decodare (descifrare): operaţia inversă codării

Sursă discretă fără memorie: sursa la care probabilitatea de apariţie a unui simbol nu depinde de simbolurile precedente:

$$p(x_i/x_{i-1}, x_{i-2}, \dots) = p(x_i)$$

Sursă discretă cu memorie: sursa la care probabilitatea de apariţie a unui simbol depinde de simbolul precedent sau de un şir de simboluri anterioare (în funcţie de memoria sursei)

Sursă staționară: sursa la care probabilitățile diferitelor simboluri nu depinde de originea timpului, ci numai de poziția lor relativă:

$$P\{\xi_{t_k} = x_i\} = P\{\xi_{t_k+\tau} = x_i\} \quad \forall\tau$$

Sursă ergodică: sursa staționară cu memorie finită la care toate șirurile de simboluri sunt *șiruri tipice*

Un *șir tipic* al unei surse fără memorie este un șir care conține $n_1 = np_1$ simboluri x_1, $n_2 = np_2$ simboluri x_2, ș.a.m.d., unde $n = \sum n_i$ este un număr foarte mare $\to \infty$, iar p_i probabilitatea de apariție a simbolului x_i. Mulțimea șirurilor tipice are o probabilitate diferită de zero și diferită de 1, tinzând către 1 pe măsură ce n crește.

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 17 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Frecvențele diferitelor simboluri obținute din șiruri particulare vor tinde către limitele $p_1, p_2, ..., p_k$ independente de șirul particular la care s-a făcut evaluarea (când lungimea șirului $\to \infty$)

La aceleași valori ale probabilităților se ajunge dacă se consideră o mulțime de n surse identice și la un moment dat se numără sursele care dau simbolul x_1 (în număr de n_1), cele care dau simbolul x_2 (în număr de n_2) ș.a.m.d. Frecvențele $\frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n}$, ... când $n \to \infty$ tind spre probabilitățile $p_1, p_2, ...$

Ergodicitatea presupune identificarea valorilor medii de-a lungul unei secvențe realizate de o singură sursă, de-a lungul axei timpului, cu valorile medii obținute asupra ansamblului secvențelor de la cele n surse, la un moment dat.

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 18 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Sursă cu debit controlabil: sursa care generează mesaje la o indicație exterioară sursei, fără a exista constrângeri interne privind timpul la care trebuie transmise mesajele

Ex. sursa unui sistem telegrafic de transmis texte

Sursă cu debit necontrolabil: sursa care generează mesaje cu un debit fix ce nu poate fi controlat, el fiind o proprietate internă a sursei

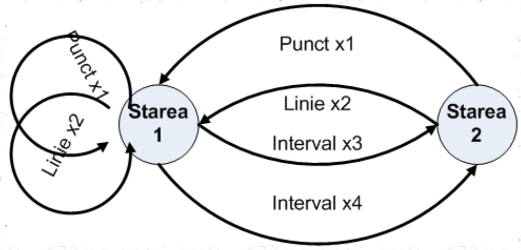
Sursă discretă fără constrângeri: sursa staționară care nu are memorie

Un simbol poate să urmeze cu aceeași probabilitate orice simbol.

Sursă discretă cu constrângeri fixe: sursa la care unele simboluri nu pot fi utilizate decât în anumite condiții bine determinate

Sursa alfabetului Morse

Exemplu de sursă discretă cu constrângeri fixe



În cazul codului Morse, un punct sau o linie pot fi utilizate în orice poziție a șirului, dar intervalul între litere sau intervalul dintre cuvinte nu pot fi utilizate decât după un punct sau o linie.

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 21 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

3 Entropia

Vom considera o sursă staționară ergodică, fără memorie, care are alfabetul:

$$[X] = [x_1 x_2 \ldots x_n]$$

având probabilitățile:

$$[P] = [x_1 x_2 \ldots x_n]$$

și care generează șirul tipic de lungime N:

$$[X_n] = [x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_N}] \quad i_j = \overline{1,n}$$

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 22 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Toate șirurile tipice au aceeași probabilitate:

$$p(X_n) = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots p_n^{N_n}$$

unde $N_1, N_2, \dots, N_n$ reprezintă numărul de simboluri $x_1, x_2, \dots, x_n$ din șirul X_n.

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N$$

Pentru un N foarte mare se poate scrie: $N_i = N p_i$, de unde rezultă că:

$$p(X_n) = \left(p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_n^{p_n}\right)^N$$

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 23 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Cantitatea de informație care se obține când se realizează un șir tipic X_n este:

$$I(X_n) = -log p(X_n) = -N \sum_{i=1}^{n} p_i log p_i$$

Entropia este *informația proprie medie pe simbol* și este egală cu:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i log p_i$$

La același rezultat se poate ajunge pornind de la informația informația proprie a unui simbol:

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 24 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

$$i(x_i) = -log p_i$$

și făcând media pe toate simbolurile:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} i(x_i) p_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i log p_i$$

Entropia $H(X)$ este *incertitudinea medie apriori asupra evenimentelor* [X]

Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Proprietățile entropiei

Continuitatea. Entropia $H(X) = H(p_1, p_2, ..., p_n)$ este o funcție continuă în raport cu fiecare variabilă p_i în intervalul (0,1], fiind suma unor funcții continue (logaritm)

Simetria. Entropia este o funcție simetrică în raport cu toate variabilele p_i

Aditivitatea. Entropia este o funcție aditivă (din definiție)

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete

Full Screen

Search

Close

PTS 2008

Entropia $H(X)$ are valoarea maximă pentru $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$

Valoarea maximă a funcției:

$$H(X) = -\sum p_i log p_i$$

cu constrângerea că:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i - 1 = 0$$

este aceeași cu valoarea maximă a funcției:

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} p_i log p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1 \right)$$

unde λ este o constantă (multiplicatorul Lagrange) iar variabilele p_i sunt considerate independente.

Valorile p_i pentru care funcția Φ ia valoarea maximă se determină impunând ca derivatele parțiale să fie nule:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = 0, \quad pentru \quad i = \overline{1, n}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = -log p_i - log e + \lambda = 0$$

Titlul
Măsura informației în ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} = -log p_j - log e + \lambda = 0$$

de unde rezultă:

$$log p_i = log p_j \Longrightarrow p_i = p_j$$

Valoarea maximă a lui $H(X)$ are loc pentru:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n$$

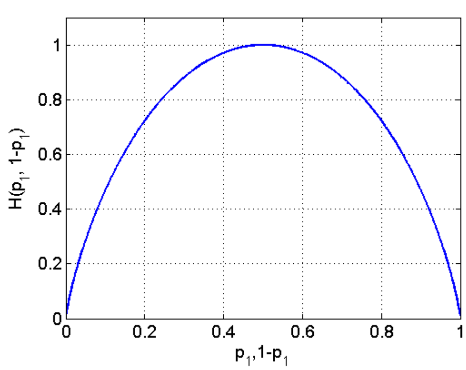
Intuitiv, incertitudinea medie este maximă dacă stările sistemului sunt echiprobabile, în acest caz fiind cel mai greu de prezis care stare anume se va realiza.

Exemplu. Să considerăm cazul unei surse cu 2 simboluri:

Titlul
Măsura informației în ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 29 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

$$H(X) = X(p_1, p_2) = -p_1 log p_1 - p_2 log p_2$$

unde $p_2 = 1 - p_1$.



Titlul
Măsura informației în ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 30 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Debitul de informaţie şi redundanţa sursei

Debitul de informaţie (sau *viteza de informare*) al unei surse este *produsul dintre entropia sursei şi numărul mediu de simboluri pe secundă*

Dacă durata medie a unui simbol este $\overline{\tau}$, debitul de informaţie al sursei este:

$$H_t(X) = \frac{H(X)}{\overline{\tau}} \quad [b/s]$$

Full Screen
Search
Close

Redundanţa unei surse este *diferenţa dintre valoarea maximă posibilă a entropiei sursei şi valoarea ei reală*

$$R_s = H_{max}(X) - H(X)$$

Se defineşte pentru a indica cât de mult se îndepărtează entropia unei surse de valoarea ei maximă posibilă (când probabilităţile simbolurilor sunt egale între ele).

Redundanţă relativă este redundanţa raportată la entropia maximă:

Titlul
Măsura informaţiei în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete

Full Screen
Search
Close

$$\rho_s = 1 - \frac{H(X)}{H_{max}(X)}$$

unde

$$H_{max}(X) = logn$$

unde n este numărul literelor din alfabetul sursei

Titlul
Măsura informaţiei în ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete

Page 33 of 42

Full Screen
Search
Close
PTS 2008

4 Canale discrete

Canal. Mediul (şi aparatura aferentă) transmiterii informaţiilor între sursă şi destinaţie. Stabileşte o tranformare de la spaţiul simbolurilor utilizatela intrare la spaţiul simbolurilor de la ieşirea din canal

- **Canal discret.** dacă spaţiul de la intrare şi cel de la ieşire sunt discrete
- **Canal continuu.** dacă spaţiile de intrare şi de ieşire sunt continue

Dacă *transmisiunea prin canal se face tot timpul* canalul se numeşte **continuu în timp**.

Dacă *transmisiunea se face la momente de timp discrete* canalul se numeşte **discret în timp**.

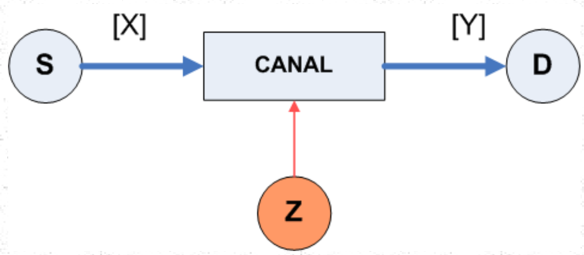
Titlul
Măsura informaţiei în ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete

Page 34 of 42

Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Dacă transformarea de la simbolul x la intrare la simbolul y la ieșire nu depinde de transformările anterioare canalul nu are memorie.

Dacă aceste transformări nu depind de alegerea originii timpului, canalul este *staționar*.



În continuare, vom studia canalele discrete, staționare, fără memorie.

Entropia la intrarea și ieșirea din canal

Vom presupune n simboluri, spațiul simbolurilor (alfabetul) la intrarea în canal fiind:

$$[X] = [x_1 x_2 \dots x_n]$$

Fiecare simbol x_i este utilizat cu probabilitatea p_i:

$$[P_x] = [p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n)]$$

Mulțimea tuturor simbolurilor la ieșirea din canal:

$$[Y] = [y_1 y_2 \dots y_m]$$

cu probabilităţile:

$$[P_y] = [p(y_1)p(y_2)...p(y_m)]$$

Din cauza zgomotului, spaţiul $[Y]$ poate să difere de spaţiul $[X]$, precum şi probabilităţile $[P_y]$ pot fi diferite de cele de la intrare $[P_x]$.

Vom defini un spaţiu produs $[X \cdot Y]$ ţinând cont de spaţiile de la intrarea şi ieşirea canalului:

$$[X \cdot Y] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_m \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

Full Screen
Search
Close
PTS 2008

unde prin produsul x_iy_j s-a notat $x_i \cap y_j$ - realizarea concomitentă a evenimentelor x_i şi y_j

Spaţiului produs îi va corespunde matricea de probabilităţi:

$$[P(X,Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_1,y_2) & \dots & p(x_1,y_m) \\ p(x_2,y_1) & p(x_2,y_2) & \dots & p(x_2,y_m) \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ p(x_n,y_1) & p(x_n,y_2) & \dots & p(x_n,y_m) \end{bmatrix}$$

Din această matrice pot fi deduse probabilităţile:

$$p(x_i) = P\{x_iy_1 \cup x_iy_2 \cup \dots \cup x_iy_m\}$$

Titlul
Măsura informaţiei în ...
Surse discrete
Entropia
Canale discrete

Full Screen
Search
Close
PTS 2008

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i y_j)$$

$$p(y_j) = P\{x_1 y_j \cup x_2 y_j \cup \ldots \cup x_n y_j\}$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i y_j)$$

În cazul canalelor discrete pot fi definite 3 câmpuri de evenimente:

- la intrarea în canal

- la ieşirea din canal
- câmpul reunit intrare-ieşire

Fiecăruia dintre aceste câmpuri îi corespunde o entropie:

- $H(X)$ - entropia câmpului de evenimente de la intrare
- $H(Y)$ - entropia câmpului de evenimente de la ieşire
- $H(X,Y)$ - entropia câmpului reunit intrare-ieşire

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) log p(x_i)$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j) log p(y_j)$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) log p(x_i,y_j)$$

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 41 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008

Entropia condiționată

va urma...

Titlul
Măsura informației în . . .
Surse discrete
Entropia
Canale discrete
Page 42 of 42
Full Screen
Search
Close
PTS 2008