

Bazele Procesării și Transmiterii Semnalelor II
– Lucrarea nr.2 –
Semnale Aleatoare
Funcțiile de intercorelație și autocorelație

M. Ivanovici

20 martie 2007

Scopul lucrării este acela de a studia funcțiile de intercorelație și autocorelație în cazul unor semnale aleatoare cu densitate de probabilitate uniformă, normală și Rayleigh.

1 Breviar teoretic

1.1 Funcția de intercorelație

Fie $\xi(t)$ și $\eta(t)$ două semnale staționare. Funcția de intercorelație între $\xi(t)$ și $\eta(t)$ se definește ca fiind:

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \overline{\xi(t)\eta(t+\tau)}$$

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\eta(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

Un estimat al funcției de intercorelație [5] pentru două secvențe aleatoare discrete $x(n)$ și $y(n)$ este dat de formula:

$$R_{\xi\eta}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)y(n+m)$$

1.2 Funcția de autocorelație

Funcția de autocorelație pentru un semnal aleator $\xi(t)$ se definește ca fiind:

$$R_{\xi}(\tau) = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)}$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Un estimat al funcției de autocorelație [5] pentru o secvență aleatoare $x(n)$ este dat de formula:

$$R_{\xi}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m)$$

1.3 Proprietățile funcției de autocorelație

1. Funcția de autocorelație este pară:

$$R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(-\tau)$$

2. Funcția de autocorelație este maximă în origine:

$$R_{\xi}(0) \geq |R_{\xi}(\tau)|$$

3. În ipoteza că nu există componente periodice sau deterministe, valoarea funcției de autocorelație la infinit este egală cu pătratul mediei semnalului:

$$R_{\xi}(\infty) = \bar{\xi}^2$$

4. Media pătratică și varianța semnalului se obțin din funcția de autocorelație astfel:

$$\bar{\xi}^2 = R_{\xi}(0)$$

$$\sigma_{\xi}^2 = R_{\xi}(0) - R_{\xi}(\infty)$$

5. Dacă semnalul aleator este periodic, atunci și funcția lui de autocorelație este periodică, având aceeași perioadă:

$$\xi(t) = \xi(t+T) \rightarrow R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(\tau+T)$$

1.4 Diagrama în spațiul stărilor

Diagrama în spațiul stărilor asociată unui semnal aleator este o reprezentare bidimensională a unei variabile aleatoare care reprezintă eșantionul de la momentul “t” al semnalului în funcție de variabila aleatoare asociată semnalului la momentul “t-p”. Reprezentarea se face pe o durată de observație “T”.

Cu ajutorul diagramei în spațiul stărilor putem vizualiza legătura între cele două variabile aleatoare pentru diferite perioade de întârziere “p”, obținând

o evaluare calitativă referitoare la corelația conținută în semnal și la natura (aleatoare sau deterministă) a semnalului.

Pentru semnalele deterministe aspectul diagramei corespunde legăturilor funcționale dintre eșantioanele semnalului, diagrama fiind o reprezentare grafică a acestora. Pentru semnalele aleatoare aspectul diagramei se prezintă sub forma unei mulțimi de puncte care pot fi incluse într-un contur închis cu o anumită formă. Această formă ne poate da informații cu privire la corelația dintre eșantioane.

2 Desfășurarea lucrării

1. Se vor genera trei secvențe de numere aleatoare, cu media și dispersia cunoscute (vezi lucrarea precedentă).
2. Pentru fiecare din cele trei secvențe aleatoare se va reprezenta grafic diagrama în spațiul stărilor pentru diverse valori ale lui p . Acest lucru se va realiza folosind următoarea instrucțiune Matlab: `plot( x(p:n), x(1:n-p) )`, unde n este dimensiunea secvenței aleatoare.
3. Pentru fiecare din cele trei secvențe aleatoare se va determina și reprezenta grafic funcția de autocorelație, pe baza formulei:

$$R_{\xi}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m)$$

4. Se determina și reprezenta grafic funcția de intercorelație pentru două dintre secvențele aleatoare generate anterior, pe baza formulei:

$$R_{\xi\eta}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)y(n+m)$$

5. Se va considera cazul unui semnal determinist obținut la ieșirea unui sistem descris de ecuația:

$$x(n) = cx(n-1)[1 - x(n-1)]$$

Să se genereze acest semnal determinist, pornind de la $x(0) = 0.2$ și $c = 4$. Să se reprezinte grafic diagrama în spațiul stărilor pentru această secvență deterministă. Să se determine și reprezinte grafic funcția sa de autocorelație.

3 Probleme

1. Cum explicați diferențele de aspect între diagramele în spațiul stărilor pentru cele trei tipuri de semnale aleatoare?
2. Cum explicați aspectul diagramei în spațiul stărilor pentru semnalul determinist.
3. Verificați proprietățile funcției de autocorelație pentru fiecare caz analizat în lucrare.

Bibliografie

- [1] A. Spătaru - “Teoria Transmisiunii Informației”, Editura Didactică și Pedagogică București, 1983.
- [2] A. T. Murgan, I. Spânu, I. Gavăt, I. Sztojanov, V. E. Neagoe, A. Vlad - “Teoria Transmisiunii Informației - probleme”, Editura Didactică și Pedagogică București, 1983.
- [3] A. T. Murgan, R. Dogaru, C. Comaniciu - “Teoria Transmisiunii Informației: Detecția, Estimarea și Filtrarea Semnalelor Aleatoare - lucrări practice”, Editura POLITEHNICA București, 1995.
- [4] M. Ciuc, C. Vertan - “Prelucrarea Statistică a Semnalelor”, Editura MatrixRom, 2005.
- [5] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer - “Digital Signal Processing”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.