Bazele Procesării şi Transmiterii Semnalelor II
– Lucrarea nr.1 –
Semnale Aleatoare
Funcţia de repartiţie şi densitatea de probabilitate de ordinul 1. Medii statistice

M. Ivanovici

13 martie 2007

Scopul lucrării este acela de a familiariza studenţii cu generarea semnalelor aleatoare cu o distribuţie dată, calcularea mediei şi a varianţei şi determinarea funcţiei de repartiţie şi a densităţii de probabilitate.

1 Breviar teoretic

Un semnal aleator este un proces care se desfăşoară în timp şi este guvernat de legi probabilistice. Din punct de vedere matematic, un semnal aleator este o funcţie de două variabile $\xi(k,t) = \xi^{(k)}(t)$, unde k ia valori în spaţiul eşantioanelor, iar t ia valori pe axa reală a timpului. Funcţia $\xi^{(k)}(t)$ face parte din mulţimea $\xi(t)$ şi se numeşte o „realizare particulară" a procesului $\xi(t)$.

Pentru a caracteriza un semnal aleator la un moment de timp t arbitrar, se folosesc funcţiile de repartiţie şi cea de densitate de probabilitate. Alte mărimi caracteristice sunt mediile statistice, cele mai importante fiind media şi dispersia.

Funcţia de repartiţie, definită într-un punct x, este probabilitatea ca variabila aleatoare la momentul t să fie mai mică sau egală decât pragul x:

$$F_\xi(x,t) = P\{\xi(t) \leq x\}$$

Densitatea de probabilitate este derivata funcţiei de repartiţie, şi anume:

$$w_\xi(x,t) = \frac{dF_\xi(x,t)}{dx}$$

Valori medii statistice larg utilizate în diverse aplicaţii:

1. Valoarea medie
$$\overline{\xi(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w_{\xi}(x,t) dx$$

2. Valoarea pătratică medie
$$\overline{\xi^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w_{\xi}(x,t) dx$$

3. Dispersia
$$\sigma^2(t) = \overline{\xi^2(t)} - \overline{\xi(t)}^2$$

2 Desfăşurarea lucrării

1. Se vor genera 3 tipuri de semnale aleatoare:
   - semnalul $x(n)$ cu distribuţie uniformă,
   - semnalul $y(n)$ cu distribuţie normală (gaussiană), şi
   - semnalul $z(n)$ cu distribuţie Rayleigh.

   Aceste 3 semnale aleatoare vor avea media şi varianţa specificate şi vor fi generate folosind următoarele formule:

   $$x(n) = m + \sqrt{3}(2rnd(1,n) - 1)\sqrt{\sigma}$$

   $$y(n) = m + \sqrt{2}\sqrt{-ln(rnd(1,n))}cos(2\pi rnd(1))\sqrt{\sigma}$$

   $$z(n) = m + \sqrt{2}\sqrt{-ln(rnd(1,n))}\sqrt{\sigma}$$

   unde funcţia $rnd(1,n)$ (random) generează n numere aleatoare distribuite uniform în intervalul $[0,1]$. Media semnalelor aleatoare este m, iar varianţa este dată de σ.

2. Se vor vizualiza diferite realizări particulare ale celor 3 semnale, folosind funţiile `figure` şi `plot` din Matlab, pentru mai multe valori ale mediei şi ale varianţei.

3. Cu ajutorul funcţiilor `mean` şi `var` din Matlab se vor calcula mediile şi varianţele celor 3 semnale şi se vor compara cu mediile şi varianţele specificate. Cum explicaţi diferenţele?

4. Se va determina funcţia de repartiţie pentru fiecare din cele 3 realizări particulare ale semnalelor aleatoare, după algoritmul de mai jos:

   - Se alege un număr N de nivele de cuantizare (de exemplu N = 100).
   - În funcţie de valorile minime şi maxime ale semnalelor, determinate cu funcţiile Matlab `min`, respectiv `max`, se va calcula pasul de cuantizare:
   $$\delta = \frac{max - min}{N}$$
   - Se va genera un şi de N valori discrete ale lui x în intervalul $[min, max]$, cu pasul δ, după formula:
   $$x_j = min + j\delta$$
   pentru $j = 1..N$.
   - Se vor determina valorile funcţiei de repartiţie, pornind de la definiţie:
   $$F_\xi(x_j) = P\{\xi \leq x_j\}$$
   pentru cele N valori discrete ale lui x în intervalul $[min, max]$, cu pasul δ. Probabilitatea se va calcula ca frecvenţă relativă de apariţie, cu alte cuvinte ca raport între numărul de valori mai mici decât un anume x şi numărul total de valori ale semnalului.

   Se va reprezenta grafic funcţia de repartiţie.

5. Pornind de la definiţie, pe baza funcţiei de repartiţie se va determina funţia de densitate de probabilitate, astfel:
   $$w_\xi(x_j) = \frac{dF_\xi(x_j)}{dx_j}$$
   Pentru cazul discret, se va folosi o aproximare a derivatei continue, dată de formula:
   $$w_j = \frac{F_j - F_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = \frac{F_j - F_{j-1}}{\delta}$$
   pentru $j = 2..N$.

   Reprezentaţi grafic funcţia de densitate de probabilitate.

6. Să se calculeze histograma valorilor semnalelor, folosind funcţia Matlab `hist` şi să se reprezinte grafic. Comparaţi rezultatul obţinut cu graficul anterior. Ce observaţi?

7. Histograma cumulativă $h_c(x)$ se calculează pe baza histogramei $h(x)$ folosind formula:

$$h_c(x) = \int_{-\infty}^{x} h(\tau) d\tau$$

În cazul discret, integrala se transformă într-o sumă, iar formula de calcul a histogramei cumulative devine:

$$h_x(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} h(k)$$

Calculaţi şi reprezentaţi grafic histograma cumulativă. Ce observaţi?

Observaţii:

- Histograma de valori ale unui semnal aleator reprezintă un estimat al funcţiei de densitate de probabilitate a acelui semnal aleator.
- Histograma cumulativă reprezintă estimatul funcţiei de repartiţie a semnalului aleator.

3 Probleme

1. Determinaţi şi reprezentaţi grafic histograma pentru următoarea secvenţă de valori aleatoare reprezentate pe 2 biţi: 1 1 3 2 3 2 0 0 0 0 0 1 1 0 3 0 2 0 0 0 0 3 3 3.
2. Calculaţi şi reprezentaţi grafic histograma cumulativă.

Bibliografie

[1] A. Spătaru - "Teoria Transmisiunii Informaţiei", Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1983.

[2] A. T. Murgan, I. Spânu, I. Gavăt, I. Sztojanov, V. E. Neagoe, A. Vlad - "Teoria Transmisiunii Informaţiei - probleme", Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1983.

[3] A. T. Murgan, R. Dogaru, C. Comaniciu - "Teoria Transmisiunii Informaţiei: Detecţia, Estimarea şi Filtrarea Semnalelor Aleatoare - lucrări practice", Editura POLITEHNICA Bucureşti, 1995.