

Bazele Procesării Semnalelor

ANALIZA FOURIER

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Braşov



Titlul

Descompunerea Se...
Transformata Fourier...
Proprietăţile Transfor...
Transformatele Fouri...

Page 1 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Cuvânt înainte

Procesarea = o serie de *transformări* suferite de către semnale

Semnalul = manifestare fizică (e.g. undă electromagnetică, undă sonoră) capabilă de a se propaga printr-un mediu dat



Titlul

Descompunerea Se...
Transformata Fourier...
Proprietăţile Transfor...
Transformatele Fouri...

Page 2 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Bibliografie

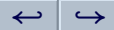
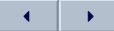
1. Alexandru Spătaru - "Teoria Transmisiunii Informației", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
2. A.T. Murgan, I. Spânu, I. Gavăt, I. Sztojanov, V.E. Neagoe, A. Vlad - "Teoria Transmisiunii Informației - Probleme", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
3. M. Ciuc, C. Vertan - "Prelucrarea Statistică a Semnalelor", Editura MatrixROM, București, 2005
4. C. Vertan, I. Gavăt, R. Stoian - "Variabile și Procese Aleatoare: Principii și Aplicații", Editura Printech, 1999



Titlul

Descompunerea Se...
Transformata Fourier...
Proprietățile Transfor...
Transformatele Fouri...

Page 3 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

1 Descompunerea Semnalelor în Serii Fourier

Semnalele periodice pot fi scrise ca o sumă numărabilă de componente sinusoidale

Forma trigonometrică a Seriei Fourier

Fie $x(t)$ un semnal periodic, de perioadă T :

$$x(t+T) = x(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

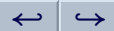
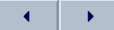
Frecvența de bază sau fundamentală a semnalului periodic $x(t)$ este:



Titlul

Descompunerea Se...
Transformata Fourier...
Proprietățile Transfor...
Transformatele Fouri...

Page 4 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Atunci putem scrie:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(n\omega t)$$

Produsul scalar al două funcții reale periodice de perioada T se definește ca:

$$\langle f(t), g(t) \rangle$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 5 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Forma armonică a Seriei Fourier

Considerăm A_n și φ_n coordonatele polare ale perechii (c_n, s_n) :

$$A_n = \sqrt{c_n^2 + s_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctg\left(\frac{s_n}{c_n}\right) \quad \forall n > 0$$

iar pentru $n = 0$:

$$A_0 = c_0$$

$$\varphi_0 = 0$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 6 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$



Titlul

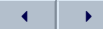
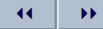
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 7 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Forma complexă a Seriei Fourier

Forma complexă este cea mai generală formă a descompunerii unui semnal periodic în serie Fourier.

Pornim de la identitatea:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

care se înlocuiește în expresia seriei Fourier precedentă.

Cu notația:

$$A_{nc} = \begin{cases} A_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} & n > 0 \\ \frac{1}{2} A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}} & n < 0 \end{cases}$$



Titlul

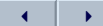
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 8 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega t}$$



Titlul

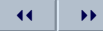
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 9 of 30



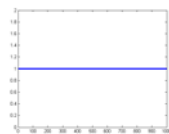
Full Screen

Search

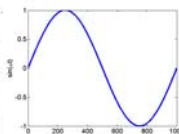
Close

BPS 2008

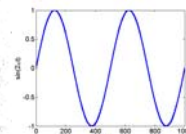
Baza de funcții a descompunerii în serie Fourier



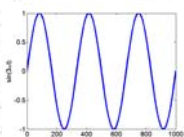
1



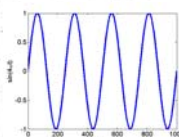
$\sin(\omega t)$



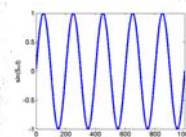
$\sin(2\omega t)$



$\sin(3\omega t)$



$\sin(4\omega t)$



$\sin(5\omega t)$

la care se adaugă $\cos(\omega t)$, $\cos(2\omega t)$, $\cos(3\omega t)$, ...



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 10 of 30



Full Screen

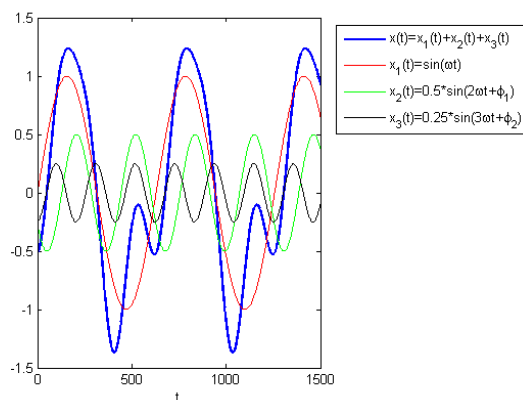
Search

Close

BPS 2008

Exemplu

$$x(t) = \sin(\omega t) + 0.5 * \sin(2\omega t + \phi_1) + 0.25 * \sin(3\omega t + \phi_2)$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 11 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

2 Transformata Fourier Continuă

Reprezintă o generalizare a unui semnal într-o sumă de sinusoides pentru semnale *neperiodice*

Definiție: Fie $x(t)$ un semnal de modul integrabil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = M < \infty$$

Prin definiție, transformata Fourier a semnalului $x(t)$ este:



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fouri...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 12 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

$$X(\omega) \triangleq \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Semnalul original $x(t)$ poate fi recuperat din transformata sa Fourier prin aplicarea operatorului invers:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformate Fouri...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 13 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Semnificația valorilor $X(\omega)$ este similară cu cea a coeficienților A_{nc} , diferența fiind numărul lor care devine în acest caz *infini*

Modulul $|X(\omega)|$ și faza $\varphi(\omega)$ ale numărului complex $X(\omega)$ reprezintă amplitudinea și faza cosinusoidei de frecvență ω .

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$



Titlul

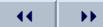
Descompunerea Se...

Transformate Fouri...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fouri...

Page 14 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

3 Proprietățile Transformatei Fourier

Liniaritatea

Transformata Fourier este liniară, respectând principiul superpoziției

$$\mathcal{F}\{ax(t) + by(t)\}(\omega) = a\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) + b\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega)$$



Titlul

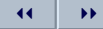
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 15 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Deplasarea în timp

Deplasarea în timp cu o constantă t_0 a unui semnal corespunde unei deviații induse în faza spectrului

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$



Titlul

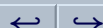
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 16 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Deplasarea în spectru

Deplasarea spectrului unui semnal cu o frecvență constantă ω_0 corespunde înmulțirii semnalului în timp cu o cosinusoidă complexă

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\}(t) = x(t)e^{j\omega_0 t}$$



Titlul

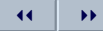
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 17 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Schimbarea de scală

O contracție a semnalului în timp cu o constantă a corespunde unei relaxări a spectrului cu aceeași constantă și reciproc

$$\mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 18 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Derivarea și integrarea în timp

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}(\omega) = j\omega X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left\{\int x(t)dt\right\}(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 19 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Conservarea energiei

Transformata Fourier conservă energia semnalului

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 20 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Simetria

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{X(t)\}(\omega) = 2\pi x(-\omega)$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 21 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Convoluția în timp

Spectrul semnalului obținut prin convoluția temporală a două semnale este egal cu produsul spectrelor celor două semnale

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil și fie $z(t)$ produsul lor de convoluție:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 22 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 23 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Convoluția în frecvență

Spectrul semnalului obținut prin produsul a două semnale se obține prin convoluția spectrelor celor două semnale

Fie $x(t)$ și $y(t)$ două semnale de modul integrabil și fie $z(t)$ produsul lor:

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Atunci are lor următoarea relație între transformatele Fourier ale celor 3 semnale:



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fouri...

Page 24 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \star Y(\omega)$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) Y(\omega - \Omega) d\Omega$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \Omega) Y(\Omega) d\Omega$$



Titlul

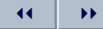
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transf...

Transformatele Fou...

Page 25 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008

4 Transformatele Fourier ale câtorva semnale de interes

Impulsul Dirac



Titlul

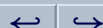
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fou...

Page 26 of 30



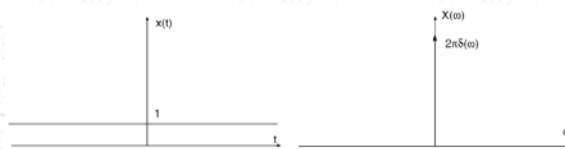
Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Semnalul constant



Titlul

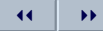
Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fou...

Page 27 of 30



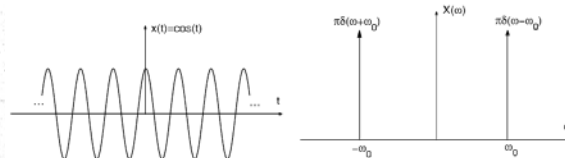
Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Funcția cosinus



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fou...

Page 28 of 30



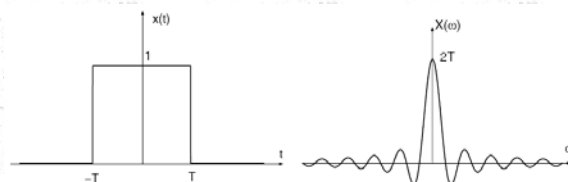
Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Semnalul dreptunghiular



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fou...

Page 29 of 30



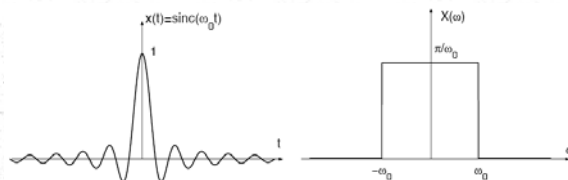
Full Screen

Search

Close

BPS 2008

Semnalul sinus cardinal



Titlul

Descompunerea Se...

Transformata Fourier...

Proprietățile Transfor...

Transformatele Fou...

Page 30 of 30



Full Screen

Search

Close

BPS 2008