VARIABILE ŞI PROCESE ALEATOARE: Principii şi aplicaţii

Constantin VERTAN, Inge GAVĂT, Rodica STOIAN

23 mai 1999

Cuprins

Capitolul 1

Cuvânt înainte

În cadrul cursului de Teoria Transmisiunii Informaţiei II, capitolelor destinate studiului semnalelor aleatoare şi prelucrării lor cu ajutorul sistemelor liniare li se acordă un rol din ce în ce mai important. În toate sistemele de transmitere a informaţiei, atât componenta utilă, cât şi perturbaţiile au o natură probabilistică, care se poate modela matematic prin variabile şi procese aleatoare, ceea ce face ca studiul acestora să prezinte un interes aparte. Dificultăţile acestui studiu, pentru o formaţie inginerească, pot fi în mare măsură depăşite prin alegerea unui material aplicativ potrivit, ceea ce îşi şi propune culegerea de probleme de faţă.

Urmărind îndeaproape cursul şi gradând dificultatea aplicaţiilor, culegerea acoperă prima parte a cursului de Teoria Transmisiunii Informaţiei II. Fiecare dintre cele 9 capitole are un scurt breviar teoretic, câteva probleme rezolvate şi probleme propuse. Sunt prevăzute capitole privind: momentele variabilelor aleatoare continue şi discrete, funcţiile de variabilă aleatoare, caracterizarea statistică a unei perechi de variabile aleatoare (cu lămurirea noţiunilor de independenţă statistică şi necorelare a două variabile aleatoare). Sunt în continuare capitole consacrate proceselor aleatoare, momentelor statistice şi mediilor lor temporale, făcându-se distincţia între diferite categorii de procese aleatoare (pur aleator, proces Markov, proces staţionar, proces ergodic). Este de asemenea tratată extinderea analizei Fourier la procese aleatoare prin teorema Wiener-Hincin şi trecerea semnalelor aleatoare prin sisteme liniare. Ultimul capitol al culegerii este dedicat spaţiilor de reprezentare a semnalelor.

Autorii au avut în vedere o abordare pragmatică şi sintetică a tematicii, încercând să pună la dispoziţia studenţilor secţiei de comunicaţii un material didactic util pentru însuşirea cunoştinţelor de bază privind procesele aleatoare, care să constituie un punct de plecare pentru un studiu mai aprofundat şi rafinat al acestui subiect.

Capitolul 2

Variabile aleatoare cu valori continue

O variabilă aleatoare este o funcţie ce asociază un număr real realizării unui eveniment; dacă Ω este mulţimea evenimentelor elementare, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ atunci avem

$$\xi : \Omega \longrightarrow R,\ \xi(\omega_k) = x. \tag{2.1}$$

Un exemplu de variabilă aleatoare este valoarea rezistenţei unui rezistor; acest număr real este asociat evenimentului de alegere a unui rezistor de pe fluxul de fabricaţie; o realizare particulară a acestei variabile aleatoare înseamnă măsurarea unui anumit rezistor deja ales.

2.1 Funcţia de repartiţie a variabilelor aleatoare

Fie o variabilă aleatoare ξ ale cărei valori observate sunt numere reale. Valoarea funcţiei de repartiţie $F_\xi(x)$ este definită ca probabilitatea evenimentului ca valoarea unei realizări particulare a variabilei aleatoare ξ să fie mai mică decât x:

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leqslant x\}. \tag{2.2}$$

Fiind definite ca probabilităţi, valorile funcţiei de repartiţie vor fi, evident, numere reale din intervalul $[0; 1]$, deci:

$$0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Valorile extreme ale funcţiei de repartiţie se obţin pentru valori particulare ale lui x. Dacă $x = -\infty$, atunci

$$F_\xi(-\infty) = P\{\xi \leqslant -\infty\} = 0, \tag{2.4}$$

(deoarece nici o valoare reală, aşa cum este ξ, nu poate fi mai mică decât $-\infty$). Dacă $x = \infty$, atunci:

$$F_\xi(\infty) = P\{\xi \leqslant \infty\} = 1, \tag{2.5}$$

(deoarece orice valoare reală este mai mică decât ∞).

În plus, dacă avem $x_1 \leqslant x_2$ două valori reale oarecari, atunci $F_\xi(x_1) \leqslant F_\xi(x_2)$, şi deci funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare este o funcţie crescătoare, sau cel puţin nedescrescătoare:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leqslant F_\xi(x_2). \tag{2.6}$$

Într-adevăr, $F_\xi(x_2) = P\{\xi \leqslant x_2\} = P\{\xi \leqslant x_1\} + P\{x_1 < \xi \leqslant x_2\} \geqslant P\{\xi \leq x_1\}$.

Se poate demonstra uşor că:

$$P(a < \xi \leqslant b) = F_\xi(b) - F_\xi(a). \tag{2.7}$$

2.2 Funcţia de densitate de probabilitate a variabilelor aleatoare

Funcţia de densitate de probabilitate este derivata funcţiei de repartiţie:

$$f_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}. \tag{2.8}$$

Fiind derivata unei funcţii crescătoare (2.6), funcţia de densitate de probabilitate va avea întotdeauna valori pozitive:

$$f_\xi(x) \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Din definiţia (2.8) rezultă că putem scrie funcţia de repartiţie ca primitivă a funcţiei de densitate de probabilitate:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt. \tag{2.10}$$

Acestă formulă poate fi particularizată pentru diferite valori ale lui x; pentru $x = \infty$, se obţine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = 1, \tag{2.11}$$

numită condiţia de normare a funcţiei de densitate de probabilitate (geometric, acestă condiţie se interpretează prin aceea că aria subgraficului funcţiei de densitate de probabilitate trebuie să fie unitară).

Condiţiile esenţiale ce trebuiesc verificate pentru orice funcţie ce este o densitate de probabilitate sunt (2.9) şi (2.11).

2.3 Momente statistice centrate şi necentrate

Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei funcţie de densitate de probabilitate este $f_\xi(x)$. Pe baza acesteia se pot defini momentele statistice [necentrate] ale variabilei aleatoare. Momentul statistic [necentrat] de ordin k este:

$$m_\xi^{(k)} = m_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)dx. \tag{2.12}$$

Cazurile particulare de maxim interes sunt momentele de ordinul 1 (media statistică a variabilei aleatoare) şi de ordinul 2 (media pătratică a variabilei aleatoare):

$$\overline{\xi} = m_\xi^{(1)} = m_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx, \tag{2.13}$$

$$\overline{\xi^2} = m_\xi^{(2)} = m_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx. \tag{2.14}$$

Momentul statistic centrat de ordinul k al variabilei aleatoare ξ este:

$$M_\xi^{(k)} = M_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{\xi})^k f_\xi(x)dx. \tag{2.15}$$

Cazul particular cel mai utilizat este momentul statistic centrat de ordinul 2, numit varianţa variabilei aleatoare:

$$\sigma^2 = M_\xi^{(2)} = M_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{\xi})^2 f_\xi(x)dx. \tag{2.16}$$

Rădăcina de ordinul 2 a varianţei se numeşte deviaţie standard:

$$\sigma = \sqrt{M_2}. \tag{2.17}$$

2.4 Probleme rezolvate

Exemplul 2.1 *Să se determine funcţia de densitate de probabilitate, funcţia de repartiţie, media, media pătratică şi varianţa unei variabile aleatoare ξ, distribuite uniform în intervalul $[a; b]$.*

Rezolvare: O distribuţie uniformă este definită de faptul că orice valoare din intervalul posibil (deci $[a; b]$ în acest caz) este echiprobabilă. Valorile din afara intervalului de definiţie $[a; b]$ sunt imposibile, deci de probabilitate nulă. Acesta înseamnă că funcţia de densitate de probabilitate este constantă pe intervalul pe care variabila aleatoare ia valori şi nulă în rest. Deci:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} k, \text{ dacă } x \in [a; b], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Acestă funcţie trebuie să verifice cele două condiţii fundamentale ale unei densităţi de probabilitate: să fie pozitivă (2.9) şi să aibă aria subgraficului unitară (2.11). Atunci

$$f_\xi(x) \geqslant 0 \Longrightarrow k \geqslant 0$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = \int_a^b kdt = k(b-a) = 1 \Longrightarrow k = \frac{1}{b-a}.$$

Odată determinată funcţia de densitate de probabilitate, al cărei grafic este reprezentat în figură, se poate determina funcţia de repartiţie, după formula (2.10):

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt, \text{ dacă } x < a \\ \int_a^x kdt = k(x-a) = \frac{x-a}{x-b}, \text{ dacă } x \in [a;b] \\ \int_a^b kdt = k(b-a) = 1, \text{ dacă } x \geqslant b. \end{cases}$$

Graficul acestei funcţii este reprezentat în figura 2.1; se remarcă că verifică proprietăţile generale ale funcţiilor de repartiţie: funcţia este crescătoare, $F_\xi(-\infty) = 0$ şi $F_\xi(\infty) = 1$.

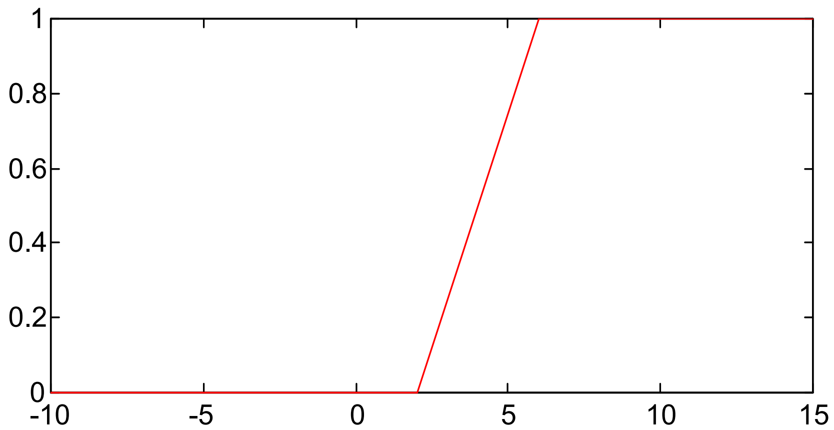

Fig. 2.1: Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare distribuite uniform (cu a=2 şi b=6)

Determinarea mediei se face după definiţia (2.13), ca moment statistic necentrat de ordinul 1:

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{2(b-a)}x^2\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}\ .$$

Determinarea mediei pătratice se face după definiţia (2.14), ca moment statistic necentrat de ordinul 2:

$$\overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{3(b-a)}x^3\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}\ .$$

Determinarea varianţei se face după definiţia (2.16), ca moment statistic centrat de ordinul 2:

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{\xi})^2 f_{\xi}(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{b-a}dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}dx - \int\limits_{a}^{b} \frac{x(b+a)}{b-a}dx + +\frac{(a+b)^2}{4(b-a)} \int\limits_{a}^{b} dx =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}x^3 \left.\right|_a^b - \frac{b+a}{2(b-a)}x^2 \left.\right|_a^b + \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

■

Exemplul 2.2 *Să se verifice că funcţia Gaussiană ("clopotul lui Gauss") este o funcţie de densitate de probabilitate şi să se calculeze media şi varianţa variabilei aleatoare a cărei distribuţie este dată de această funcţie.*

Rezolvare: Funcţia "clopotul lui Gauss" este dată de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(reprezentată în figura 2.2 pentru un caz particular).

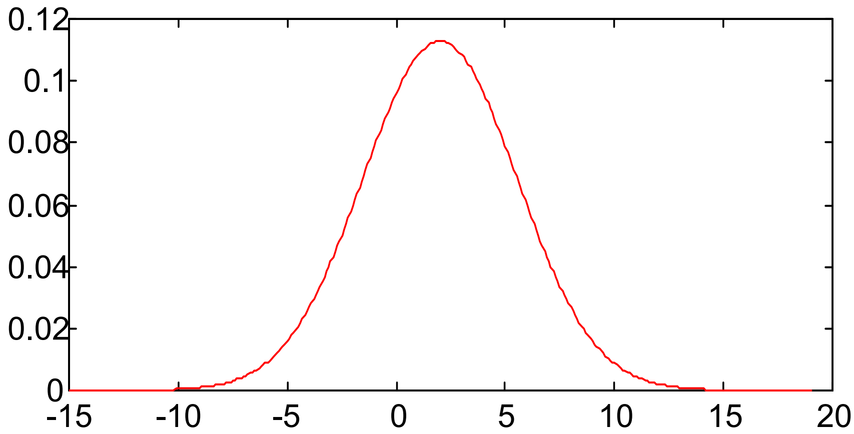

Fig. 2.2: Funcţie de densitate de probabilitate normală (Gaussiană) de medie 2 şi varianţă 12.5

Vom demonstra că media este μ şi varianţa este σ^2, dar, mai întâi, vom verifica condiţiile pe necesare pentru ca $f(x)$ să fie densitate de probabilitate: să fie pozitivă (2.9) şi să verifice condiţia de normare (2.11). Întrucât funcţia este de tip exponenţial, valorile sunt întotdeauna pozitive. Pentru a verifica condiţia de normare este necesară efectuarea unui calcul ajutător, cel al integralei:

$$I_x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Pentru aceasta vom calcula $I_x I_y$, adică:

$$I_x I_y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

prin trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) (ce variază între $-\infty$ şi ∞) la coordonatele polare (r, θ), date de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $\theta = arctg(y/x)$. Aceasta duce la schimbarea de variabile $x = r\cos\theta$ şi $y = r\sin\theta$, cu limitele $r \in [0; \infty)$ şi $\theta \in [0; 2\pi]$. Jacobianul transformării de schimbare a variabilelor este:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Integrala devine:

$$I_x I_y = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi\frac{1}{2}e^{-r^2}\,|_0^{\infty} = \pi.$$

Dar cum $I_x = I_y$, atunci avem că $I_x = \sqrt{\pi}$, adică:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Verificarea condiţiei de normare a densităţii de probabilitate înseamnă calculul integralei:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$, şi atunci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\sqrt{2\sigma^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1.$$

Calculul mediei se face după definiţia (2.13):

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(-\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x-\mu)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right) = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu.$$

Calculul varianţei se face după definiţia (2.16):

$$\sigma_\xi^2 = \overline{(\xi - \overline{\xi})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{\xi})^2 f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) dx = -\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)' dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \left((x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

O distribuţie normală (Gaussiană) de medie μ şi de varianţă σ^2 se mai notează şi cu $N(\mu, \sigma^2)$.

■

Exemplul 2.3 *Se consideră funcţia* $w(x) = \begin{cases} 1/x, \text{ dacă } 1-c \leqslant x \leqslant 1+c \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$. *Să se determine valoarea constantei c pentru care funcţia w(x) poate fi o funcţie de densitate de probabilitate, să se reprezinte grafic şi să se calculeze funcţia de repartiţie asociată.*

Rezolvare: Pentru ca funcţia dată să fie o funcţie de densitate de probabilitate trebuie verificate condiţiile de pozitivitate şi de normare. În plus, trebuie ca intervalul pe care funcţia este definită să existe: $1 - c \leqslant 1 + c$, $x \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1 - c \geqslant 0$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$. Atunci avem $c \geqslant 0$, $c \leqslant 1$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = \int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_{1-c}^{1+c} = \ln \frac{1+c}{1-c} = 1$; de aici rezultă că $\frac{1+c}{1-c} = e$, şi deci $c = \frac{e-1}{e+1}$. Se verifică astfel că această valoare este pozitivă şi subunitară. Atunci funcţia de densitate de probabilitate este:

$$w(x) = \begin{cases} 1/x, \text{ dacă } \frac{2}{e+1} \leqslant x \leqslant \frac{2e}{e+1} \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Funcţia de repartiţie asociată este dată de formula (2.10):

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} w(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < \frac{2}{e+1} \\ \int_{2/(e+1)}^{x} \frac{1}{t}dt = \ln t \Big|_{2/(e+1)}^{x} = \ln \frac{x(e+1)}{2}, \text{ dacă } \frac{2}{e+1} \leqslant x \leqslant \frac{2e}{e+1} \\ 1, \text{ dacă } x > \frac{2e}{e+1}. \end{cases}$$

■

Exemplul 2.4 *Să se determine relaţia dintre media, media pătratică şi varianţa unei variabile aleatoare.*

Rezolvare: Se pleacă de la definiţia (2.16) a varianţei în care se dezvoltă termenul la pătrat şi se separă integrala: $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{\xi})^2 f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\overline{\xi} + \overline{\xi}^2) f_\xi(x)dx =$
$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2x\overline{\xi} f_\xi(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\xi}^2 f_\xi(x)dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - 2\overline{\xi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx + \overline{\xi}^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx.$

Dar primul termen al sumei este chiar media pătratică (definită în (2.14)), integrala din al doilea termen este chiar media (definită în (2.13)), iar integrala din ultimul termen este 1 (reprezentând condiţia de normare a funcţiei de densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare, (2.11)). Atunci relaţia anterioară devine:

$$\sigma^2 = \overline{\xi^2} - 2\overline{\xi}\overline{\xi} + \overline{\xi}^2 = \overline{\xi^2} - 2\overline{\xi}^2 + \overline{\xi}^2 = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 = m_2 - m_1^2. \qquad (2.18)$$

Deci varianţa este diferenţa dintre media pătratică şi pătratul mediei.

■

Exemplul 2.5 *Se consideră funcţia* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, \text{ dacă } x \in [1;\infty) \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$. *Să se arate că această funcţie este o funcţie de densitate de probabilitate şi să se calculeze media şi media pătratică a variabilei aleatoare distribite după* $f(x)$.

Rezolvare: Se observă că $f(x) \geqslant 0$; mai trebuie deci verificată condiţia de normare (2.11). Aceasta înseamnă calculul:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1 - \frac{1}{\infty} = 1.$$

Media (2.13) (momentul statistic [necentrat] de ordinul 1) variabilei aleatoare care este distribuită după această densitate de probabilitate este:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{1}^{\infty} x\frac{1}{x^2}dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^\infty = \ln\infty = \infty.$$

Media pătratică (2.14) (momentul statistic [necentrat] de ordinul 2) a variabilei aleatoare care este distribuită după această densitate de probabilitate este:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{1}^{\infty} x^2\frac{1}{x^2}dx = \int\limits_{1}^{\infty} 1dx = x\Big|_1^\infty = \infty - 1 = \infty.$$

Calculul arată că nu există momente statistice, începând cu ordinul 1.

■

2.5 Probleme propuse

Tema 2.1 *Să se calculeze media, media pătratică şi varianţa variabilei aleatoare* γ, *dacă funcţia sa de densitate de probabilitate este* $w_\gamma(x) = \begin{cases} 2x, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$.

Tema 2.2 *Să se calculeze media, media pătratică şi varianţa variabilei aleatoare* γ, *dacă funcţia sa de densitate de probabilitate este* $w_\gamma(x) = \begin{cases} |x|, \text{ dacă } |x| \leqslant 1 \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$.

Tema 2.3 *Să se calculeze media, media pătratică şi varianţa variabilei aleatoare* γ, *dacă funcţia sa de densitate de probabilitate este* $w_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - |1-x|, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$.

Tema 2.4 *Să se verifice că funcţia* $w(x)$ *este o densitate de probabilitate. Să se determine media şi dispersia pentru distribuţia caracterizată de aceasta (exponenţială negativă).*

$$w(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Tema 2.5 *Să se verifice că funcţia* $w(x)$ *este o densitate de probabilitate. Să se determine media şi dispersia pentru distribuţia caracterizată de aceasta (distribuţie Rayleigh):*

$$w(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Tema 2.6 *Să se verifice că funcţia* $w(x)$ *este o densitate de probabilitate. Să se determine media şi dispersia pentru distribuţia caracterizată de aceasta* $w(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}$ *(distribuţie Laplace).*

Tema 2.7 *Se dă funcţia* $w(x) = \frac{k}{e^x + e^{-x}}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. *Să se determine constanta* k *astfel încât* $w(x)$ *să fie o funcţie de densitate de probabilitate şi să se calculeze funcţia de repartiţie asociată. Presupunând două variabile aleatoare* ξ *şi* γ *independente, caracterizate de densitatea de probabilitate* $w(x)$, *să se calculeze probabilitatea evenimentului* $\{\xi \leqslant 1$ *şi* $\gamma \geqslant 1\}$.

Tema 2.8 *Se consideră funcţia* $w(x) = \begin{cases} a/\sqrt{e^2 - x^2}, \text{ dacă } |x| < e \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$. *Să se determine constanta* a *astfel încât funcţia* $w(x)$ *să fie funcţia de densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare* ξ. *Să se calculeze funcţia de repartiţie asociată şi să se calculeze probabilitatea ca valoarea unei realizări particulare a variabilei aleatoare să fie cuprinsă în intervalul* $[0; e]$. *Să se reprezinte grafic funcţiile determinate.*

Tema 2.9 *Se consideră funcţia* $w(x) = \begin{cases} ax, \text{ dacă } x \in [0; 1] \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$. *Să se determine constanta* a *astfel încât funcţia* $w(x)$ *să fie funcţia de densitate de probabilitate a unei* *variabile aleatoare ξ. Să se calculeze funcţia de repartiţie asociată şi să se calculeze probabilitatea ca valoarea unei realizări particulare a variabilei aleatoare să fie cuprinsă în intervalul $[\alpha;\beta]$. Să se reprezinte grafic funcţiile determinate.*

Tema 2.10 *Se consideră funcţia* $w(x) = \begin{cases} x^p, \text{ dacă } x \in [-k;k] \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$ *. Să se determine constantele k şi $p > 0$ astfel încât funcţia $w(x)$ să fie funcţia de densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare ξ; să se calculeze funcţia de repartiţie asociată.*

Tema 2.11 *Se consideră funcţia* $w(x) = \begin{cases} x^{-p}, \text{ dacă } x \in [1;\infty) \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$ *, $p \in N$. Să se verifice dacă acestă familie de funcţii pot fi funcţiile de densitate de probabilitate ale unei variabile aleatoare şi, în caz afirmativ, să se calculeze momentele statistice necentrate ale variabilei aleatoare.*

Tema 2.12 *O variabilă aleatoare ξ distribuită normal $N(\mu,\sigma^2)$ este aproximată cu o variabilă aleatoare η cu distribuţie uniformă în $[a;b]$, astfel încât cele două variabile aleatoare au aceeaşi medie şi aceeaşi varianţă. Să se determine valorile a şi b, funcţia de densitate de probabilitate a lui η, precum şi mediile pătratice ale variabilelor ξ şi η.*

Tema 2.13 *Stabiliţi care dintre afirmaţiile următoare sunt adevărate, uneori adevărate, sau false, justificând decizia făcută:*

1. $\overline{\xi^2} = 0 \Longrightarrow \overline{\xi} \neq 0$
2. $\overline{\xi^2} \neq 0 \Longrightarrow \overline{\xi} = 0$
3. $\overline{\xi} = 0 \Longrightarrow \overline{\xi^2} = 0$
4. $\overline{\xi^2} > 0 \Longrightarrow \overline{\xi} \neq 0$
5. $\overline{\xi} = 0 \Longrightarrow f_\xi(x) = f_\xi(-x)$
6. $f_\xi(x) = f_\xi(-x) \Longrightarrow \overline{\xi} = 0$

Tema 2.14 *Să se verifice că funcţia $w(x)$ este o densitate de probabilitate. Să se determine media şi dispersia pentru distribuţia caracterizată de aceasta,*

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{\max}}\left(1 - \frac{|x|}{x_{\max}}\right), \text{ dacă } |x| \leqslant x_{\max} \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

.

Tema 2.15 *Subgraficul funcţiei de densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare este un triunghi determinat de vârfurile de coordonate $(0,0)$, $(0,0.4)$, $(0,5)$. Să se calculeze funcţia de repartiţie asociată, media, varianţa şi media pătratică a variabilei aleatoare.*

Capitolul 3

Variabile aleatoare cu valori discrete

Se numeşte variabilă aleatoare discretă (sau variabilă aleatoare cu valori discrete) o variabilă aleatoare ale cărei valori aparţin unei mulţimi finite sau numărabile.

3.1 Funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate

Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ mulţimea evenimentelor elementare asociate unei experienţe probabiliste. Fie variabila aleatoare ξ, ce asociază fiecărui eveniment elementar ω_i valoarea reală x_i:

$$\xi : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \ \xi(\omega_i) = x_i. \tag{3.1}$$

Fie p_i probabilitatea asociată evenimentului ω_i şi presupunând că $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$ (în caz contrar, valorile se pot permuta între ele pentru a obţine ordinea dorită), avem că funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ astfel definite este:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < x_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{i} p_j, \text{ dacă } x \in [x_i; x_{i+1}), \ i = \overline{1, n-1} \\ 1, \text{ dacă } x > x_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Prin derivarea funcţiei de repartiţie[1] din (3.2) obţinem funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare discrete:

$$f_\xi(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \delta(x - x_j). \tag{3.3}$$

[1] Această funcţie nu este derivabilă în punctele x_i (în care nu este nici măcar continuă); derivarea se face prin introducerea distribuţiei Dirac în punctele de discontinuitate, cu amplitudine egală cu valoarea saltului funcţiei.

3.2 Momente statistice

Momentele statistice [necentrate] ale unei variabile aleatoare discrete vor fi date de:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \delta(x - x_j)\right) dx = \sum_{j=1}^{n} p_j \int_{-\infty}^{\infty} x^k \delta(x - x_j)dx = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^k. \tag{3.4}$$

Media variabilei aleatoare discrete va fi atunci obţinută pentru $k = 1$,

$$\overline{\xi} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j, \tag{3.5}$$

iar pentru $k = 2$ se obţine media pătratică:

$$\overline{\xi^2} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2. \tag{3.6}$$

Momentele statistice centrate ale unei variabile aleatoare discrete vor fi date de:

$$\begin{aligned} M_k &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \delta(x - x_j)\right) dx = \qquad (3.7) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k \delta(x - x_j)dx = \sum_{j=1}^{n} p_j (x_j - m_1)^k = \sum_{j=1}^{n} p_j (x_j - \overline{\xi})^k \end{aligned}$$

Varianţa variabilei aleatoare discrete va fi atunci obţinută pentru $k = 2$,

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(x_j - \overline{\xi}\right)^2. \tag{3.8}$$

3.3 Probleme rezolvate

Exemplul 3.1 *Să se determine funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate pentru variabila aleatoare ξ asociată răspunsului unui informatician la o fereastră (Windows) cu trei butoane: Yes (1), No (0), Cancel (2).*

Rezolvare: In primul rând trebuiesc identificate evenimentele elementare şi numerele reale ce le sunt asociate. Evenimentele elementare vor fi: ω_1- s-a apăsat butonul No, valoarea reală asociată este 0; ω_2- s-a apăsat butonul Yes, valoarea reală asociată este 1; ω_3- s-a apăsat butonul Cancel, valoarea reală asociată este 2. Presupunem că probabilităţile acestor evenimente sunt p_1, p_2, p_3, astfel ca $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ este dată de definiţia (2.2), adică $F_\xi(x) = P\{\xi \leqslant x\}$. Aplicând formula de definiţie pentru această problemă, distingem patru cazuri particulare:

1. dacă $x < x_1 = 0$: în acestă situaţie nici una dintre valorile pe care le poate lua variabila aleatoare ξ nu este mai mică strict ca 0, deci funcţia de repartiţie va fi nulă.

2. dacă $x \in [0, x_2) = [0; 1)$; în acest caz avem că $P\{\xi \leqslant x\} = P\{\xi < 0\} + P\{\xi = 0\} + P\{\xi \in (0, 1)\} = 0 + p_1 + 0 = p_1$.

3. dacă $x \in [1, x_3) = [1; 2)$; în acest caz avem că $P\{\xi \leqslant x\} = P\{\xi < 0\} + P\{\xi = 0\} + P\{\xi \in (0, 1)\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi \in (1, 2)\} = 0 + p_1 + 0 + p_2 + 0 = p_1 + p_2$.

4. dacă $x \geqslant x_3 = 2$; în acest caz avem: $P\{\xi \leqslant x\} = P\{\xi < 0\} + P\{\xi = 0\} + P\{\xi \in (0, 1)\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi \in (1, 2)\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi \in (2, \infty)\} = p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

În concluzie, funcţia de repartiţie este:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0, \\ p_1, \text{ dacă } x \in [0; 1), \\ p_1 + p_2, \text{ dacă } x \in [1; 2), \\ 1, \text{ dacă } x \in [2; \infty). \end{cases}$$

Graficul acestei funcţii este reprezentat în figura 3.1 (pentru $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.5$ şi $p_3 = 0.25$).

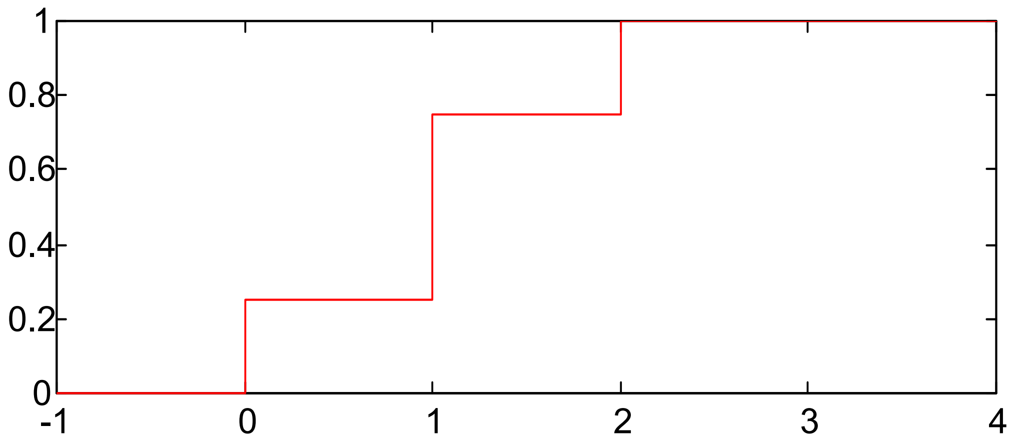

Fig. 3.1: Funcţia de repartiţie

Funcţia de densitate de probabilitate este derivata funcţiei de repartiţie; acestă derivată va fi nulă pe porţiunile pe care funcţia de repartiţie este constantă şi va fi o distribuţie de tip Dirac (δ) în punctele de discontinuitate ale lui $F_\xi(x)$. Atunci:

$$f_\xi(x) = p_1\delta(x) + p_2\delta(x-1) + p_3\delta(x-2).$$

■

Exemplul 3.2 *Să se calculeze valoarea medie şi varianţa pentru distribuţia geometrică definită de:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} pq^x \delta(x-j).$$

Rezolvare: Conform formulei mediei (3.5), dacă funcţia de densitate de probabilitate este $f_\xi(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} p_j \delta(x - x_j)$, rezultă:

$$\overline{\xi} = \sum_{j=0}^{n} p_j x_j.$$

Pentru distribuţia geometrică dată în enunţul problemei se observă că: $n \longrightarrow \infty$, $x_i = i$ şi $p_i = pq^i$. Trebuie verificată condiţia de normare a probabilităţilor:

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} pq^j = p \sum_{j=0}^{\infty} q^j = p \frac{1 - q^\infty}{1 - q} = \frac{p}{1 - q} = 1.$$

Atunci media variabilei aleatoare devine:

$$\overline{\xi} = \sum_{j=1}^{\infty} pq^j j = p \sum_{j=1}^{\infty} q^j j = p \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} q^i \right) = p \sum_{j=1}^{\infty} q^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i \right) = p \sum_{j=1}^{\infty} q^j \frac{1 - q^\infty}{1 - q} =$$

$$= \frac{p}{1 - q} \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{pq}{(1 - q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

Media pătratică a variabilei aleatoare este:

$$\overline{\xi^2} = \sum_{j=1}^{\infty} pq^j j^2 = p \sum_{j=1}^{\infty} q^j j^2 = p \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\sum_{i=j}^{\infty} q^i \right) = p \sum_{j=1}^{\infty} jq^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i \right) = p \sum_{j=1}^{\infty} jq^j \frac{1 - q^\infty}{1 - q} =$$

$$= \frac{p}{1 - q} \sum_{j=1}^{\infty} jq^j = \frac{p}{1 - q} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} q^i \right) = \frac{p}{1 - q} \sum_{j=1}^{\infty} q^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i \right) = \frac{p}{1 - q} \sum_{j=1}^{\infty} q^j \frac{1 - q^\infty}{1 - q} =$$

$$= \frac{p}{(1 - q)^2} \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{p}{(1 - q)^2} \sum_{j=1}^{\infty} q \frac{1 - q^\infty}{1 - q} = \frac{pq}{(1 - q)^3} = \frac{q}{p^2}.$$

Varianţa variabilei aleatoare va fi:

$$\sigma^2 = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 = \frac{q}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(1 - q)}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

■

3.4 Probleme propuse

Tema 3.1 *Să se determine funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate pentru variabila aleatoare ξ asociată experimentului de aruncare a unei monezi.*

Tema 3.2 *Să se determine funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate pentru variabila aleatoare ξ asociată experimentului de aruncare a zarului.*

Tema 3.3 *Se consideră un tetraedru regulat ale cărui feţe sunt marcate cu cifre de la* 1 *la* 4*. Să se determine funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate pentru variabila aleatoare asociată experimentului de aruncare a tetraedrului.*

Tema 3.4 *Se dă funcţia* $f(x) = 0.5\delta(x-1)+0.2\delta(x)+0.3\delta(x-2)$*. Să se reprezinte grafic şi să se arate că este o funcţie de densitate de probabilitate (a unei variabile aleatoare* ξ*); să se determine funcţia de repartiţie asociată. Să se calculeze probabilităţile* $P\{\xi < 1\}$, $P\{\xi < 2\}$, $P\{\xi \leqslant 2\}$*. Să se determine media şi varianţa lui* ξ*.*

Tema 3.5 *Să se determine funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate pentru variabila aleatoare* ξ *asociată experimentului de aruncare a zarului, dacă probabilitatea de apariţie a fiecărei feţe este proporţională cu cifra înscrisă pe faţă.*

Tema 3.6 *O variabilă aleatoare cuaternară poate lua valorile 0, 1, 2, 3 cu probabilităţile* $P(0) = P(2)$ *şi* $P(1) = P(3) = 1/3$*. Să se determine funcţia de densitate de probabilitate, funcţia de repartiţie, media şi varianţa variabilei aleatoare.*

Tema 3.7 *Să se calculeze valoarea medie şi varianţa pentru distribuţia Poisson, definită de*

$$w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \delta(x-i).$$

Tema 3.8 *Un registru de deplasare cu reacţie (RDR) generează pe ieşire o secvenţă pseudoaleatoare (PSA) binară de lungime 7. Să se determine funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate a variabilei pseudoaleatoare de la ieşirea circuitului. Dacă numerele binare sunt transmise ca tensiuni în sistem TTL, să se determine tensiunea medie.*

Tema 3.9 *Două surse independente* S_1 *şi* S_2 *produc semnalele ternare (cu valorile* 0, 1 *şi* 2*)* x *şi* y*. Se ştie că* $P\{x = 0\} = P\{x = 1\} = P\{x = 2\}$*, că media lui* y *este* 1 *şi varianţa lui* y *este* 0.5*. Să se calculeze media şi varianţa lui* x *şi probabilităţile valorilor lui* y*. Dacă variabila aleatoare* z *se obţine ca* $z = xy$*, să se determine funcţia de densitate de probabilitate şi funcţia de repartiţie a acesteia, precum şi media şi varianţa variabilei aleatoare* z*.*

Tema 3.10 *Se dă funcţia* $w(x) = 0.25\delta(x-3)+0.1\delta(x-2)+0.15\delta(x-1)+0.5\delta(x+1)$*. Să se reprezinte grafic şi să se arate că este o funcţie de densitate de probabilitate (a unei variabile aleatoare* ξ*); să se determine funcţia de repartiţie asociată. Să se calculeze probabilităţile* $P\{\xi < -1\}$, $P\{\xi \leqslant -1\}$, $P\{\xi < 2\}$, $P\{\xi \leqslant 1\}$*. Să se determine de asemenea media şi varianţa lui* ξ*.*

Capitolul 4

Funcţii de o variabilă aleatoare

După cum am arătat, orice variabilă aleatoare (2.1) este o funcţie, $\xi : \Omega \longrightarrow R$; acestă funcţie se poate compune cu orice funcţie reală de argument real ($g : R \longrightarrow R$), rezultând o altă variabilă aleatoare, notată de exemplu η, care este:

$$\eta = g \circ \xi = g(\xi),\ \eta : \Omega \longrightarrow R.$$

Problema de interes este caracterizarea noii variabile aleatoare η (deci a funcţiei de densitate de probabilitate a variabilei η) în funcţie de variabila aleatoare ξ, ale cărei proprietăţi (şi în particular funcţie de densitate de probabilitate) se presupun cunoscute.

Fie o valoare oarecare x (fixată). Probabilitatea ca valoarea unei realizări particulare a variabilei aleatoare ξ să fie egală cu x este egală cu probabilitatea ca valoarea respectivei realizări particulare a variabilei aleatoare ξ să fie cuprinsă în intervalul infinitezimal mic $[x; x + dx]$ ($dx \longrightarrow 0$). Acesta este însă:

$$P\{\xi \in [x; x + dx]\} = F_\xi(x + dx) - F_\xi(x) = \int_x^{x+dx} f_\xi(t)dt = f_\xi(x)\,|dx|\,. \qquad (4.1)$$

Dacă funcţia g este bijectivă, valorii x îi corespunde în mod unic o valoare $y = g(x)$. În mod analog deducerii lui (4.1), putem scrie că:

$$P\{\eta \in [y; y + dy]\} = f_\eta(y)\,|dy|\,. \qquad (4.2)$$

Dar, cum y se obţine în mod unic din x, rezultă că probabilităţile date de (4.1) şi (4.2) sunt egale, şi deci:

$$f_\xi(x)\,|dx| = f_\eta(y)\,|dy|\,.$$

Ceea ce ne interesează este $f_\eta(y)$, şi atunci putem scrie:

$$f_\eta(y) = f_\xi(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_\xi(x)\frac{1}{|g'(x)|}\Big|_{x=g^{-1}(y)} = f_\xi\left(g^{-1}(y)\right)\frac{1}{|g'\left(g^{-1}(y)\right)|}. \qquad (4.3)$$

Acestă formulă (4.3) este deci valabilă doar în cazul în care funcţia g este bijectivă pe întreg domeniul său de definiţie, sau, reformulat, dacă ecuaţia $y = g(x)$, cu necunoscuta x şi parametrul y, are o unică soluţie. Dacă funcţia g nu este bijectivă, domeniul său de definiţie trebuie descompus în intervale de bijectivitate. Pe fiecare asemenea interval ecuaţia $y = g(x)$, cu necunoscuta x şi parametrul y, va avea o unică soluţie (să o numim x_k). În acest caz formula (4.3) se transformă în:

$$f_\eta(y) = \sum_k f_\xi(x_k)\frac{1}{|g'(x_k)|}\Big|_{x_k=g^{-1}(y)} . \tag{4.4}$$

Condiţia esenţială este ca numărul de intervale să fie finit sau cel mult numărabil.

Pentru perechea de variabile aleatoare ξ şi η se verifică teorema de medie:

$$\overline{\eta} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_\xi(x)dx. \tag{4.5}$$

4.1 Probleme rezolvate

Exemplul 4.1 *Fie ξ o variabilă aleatoare distribuită uniform în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ şi fie funcţia $g : \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-1;1)$, cu $g(x) = \sin(x)$. Variabila aleatoare η este dată de $\eta = g(\xi)$. Să se determine funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare η.*

Rezolvare: În primul rând trebuie verificată bijectivitatea funcţiei $g(x)$ pe intervalul de definiţie, şi, dacă acesta nu este verificată, trebuie divizat acest interval în subintervale pe care funcţia este bijectivă. Bijectivitatea se poate studia simplu, prin rezolvarea ecuaţiei $y = g(x)$, cu x necunoscută şi y parametru.

În acest caz, ecuaţia $y = \sin(x)$ are o soluţie unică pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, şi anume $x = \arcsin(y)$. Deci $g^{-1}(y) = \arcsin(y)$, $g^{-1} : (-1;1) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Derivata funcţiei $g(x)$ este $g'(x) = \cos(x)$.

Conform formulei de calcul a noii funcţii de densitate de probabilitate (4.3) avem:

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(g^{-1}(y)\right)\frac{1}{|g'\left(g^{-1}(y)\right)|} = f_\xi(\arcsin(y))\frac{1}{|\cos(\arcsin(y))|} = \frac{f_\xi(\arcsin(y))}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Variabila aleatoare ξ este distribuită uniform în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; atunci

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, \text{ dacă } x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Atunci:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\begin{cases} \frac{1}{\pi}, \text{ dacă } \arcsin(y) \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ 0, \text{ în rest} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}, \text{ dacă } y \in (-1;1) \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

Graficul acestei funcţii este prezentat figura (4.1)

■

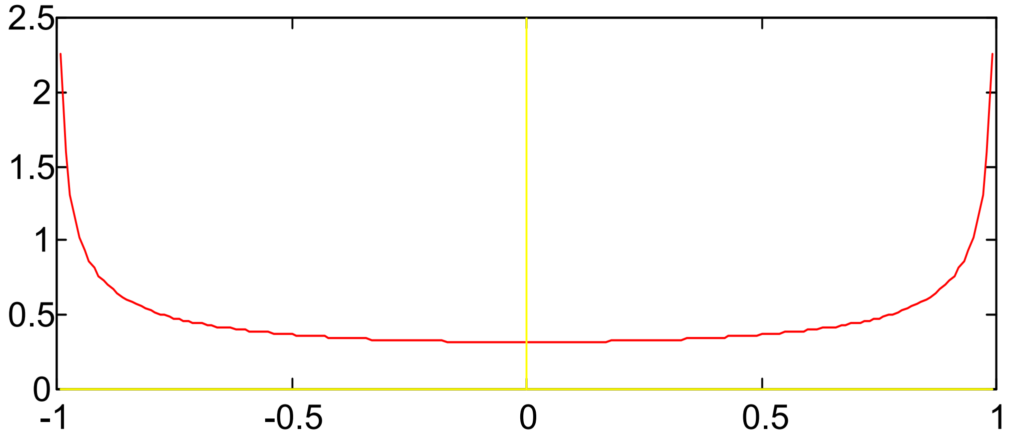

Fig. 4.1: Funcţia de densitate de probabilitate

Exemplul 4.2 *O variabilă aleatoare ξ este transformată printr-o funcţie liniară $g(x) = \alpha x + \beta$ ($\alpha \neq 0$), obţinând variabila aleatoare η. Să se determine funcţia de densitate de probabilitate, media şi varianţa lui η, în cazurile în care ξ ar fi distribuită normal, respectiv uniform.*

Rezolvare: O funcţie liniară este bijectivă; ecuaţia $y = g(x)$ cu necunoscuta x are soluţia $x = \frac{y-\beta}{\alpha}$, şi deci $g^{-1}(y) = \frac{y-\beta}{\alpha}$. Derivata funcţiei liniare este $g'(x) = \alpha$. În aceste condiţii, densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare η este dată de formula (4.3) şi este:

$$f_\eta(y) = \frac{f_\xi\left(g^{-1}(y)\right)}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|} = \frac{f_\xi\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|} f_\xi\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right). \tag{4.6}$$

Dacă variabila aleatoare ξ este distribuită normal (cu media μ şi varianţa σ^2) atunci:

$$f_\xi(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Înlocuind în expresia (4.6) obţinem:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{|\alpha|}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{y-\beta}{\alpha} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\sigma^2}} \exp\left(\frac{\left(y - (\alpha\mu+\beta)\right)^2}{2\pi\alpha^2\sigma^2}\right) =$$

$$= N\left(\alpha\mu + \beta, (\alpha\sigma)^2\right).$$

Aceasta înseamnă că distribuţia variabilei aleatoare obţinute prin transformarea liniară este tot normală, având media transformată prin aceeaşi funcţie liniară şi varianţa de α^2 ori mai mare.

Dacă variabila aleatoare ξ este distribuită uniform (în intervalul $[a; b]$ de exemplu), funcţia sa de densitate de probabilitate este:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ dacă } x \in [a; b], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Atunci:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_\xi\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|}\begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ dacă } \frac{y-\beta}{\alpha} \in [a;b], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Se disting două cazuri, date de semnul lui α; cazul 1, $\alpha > 0$:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(b-a)}, \text{ dacă } y \in [\alpha a+\beta; \alpha b+\beta], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

cazul 2, $\alpha < 0$:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha(b-a)}, \text{ dacă } y \in [\alpha b+\beta; \alpha a+\beta], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

În ambele cazuri se remarcă că distribuţia este tot uniformă, şi, conform celor demonstrate anterior, media este mijlocul intervalului în care variabila aleatoare ia valori, iar varianţa va fi $1/12$ din pătratul lungimii intervalului:

$$\overline{\eta} = \alpha\frac{a+b}{2} + \beta = \alpha\overline{\xi} + \beta \text{ şi } \sigma_\eta^2 = \frac{\alpha^2(b-a)^2}{12} = \alpha^2\sigma_\xi^2.$$

Aceasta înseamnă că distribuţia variabilei aleatoare obţinute prin transformarea liniară este tot uniformă, având media transformată prin aceeaşi funcţie liniară şi varianţa de α^2 ori mai mare.

■

Exemplul 4.3 *Se consideră variabila aleatoare ξ, uniform distribuită în intervalul $[-c;c]$. Să se determine densitatea de probabilitate şi funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare $\eta = 1/\xi^2$.*

Rezolvare: Funcţia de transformare este $g(x) = 1/x^2$. Derivata este $g'(x) = -2/x^3$. Funcţia nu este însă bijectivă pe întreaga axă reală, în schimb este bijectivă pe intervalele $(-\infty;0)$ şi $(0;\infty)$. Soluţiile ecuaţiei $y = g(x)$ sunt: $x_1 = 1/\sqrt{y}$ şi $x_2 = -1/\sqrt{y}$, pentru $y > 0$. Dacă $y < 0$ ecuaţia nu are soluţii şi $f_\eta(y) = 0$. Atunci putem aplica formula (4.4) pentru $y > 0$:

$$f_\eta(y) = \sum_k f_\xi(x_k)\frac{1}{|g'(x_k)|}\Big|_{x_k=g^{-1}(y)} = f_\xi(x_1)\frac{1}{|g'(x_1)|}\Big|_{x_1=g^{-1}(y)} + f_\xi(x_2)\frac{1}{|g'(x_2)|}\Big|_{x_2=g^{-1}(y)}$$

$$f_\eta(y) = \frac{f_\xi(1/\sqrt{y})}{\left|-2/\left(1/\sqrt{y}\right)^3\right|} + \frac{f_\xi(-1/\sqrt{y})}{\left|-2/\left(-1/\sqrt{y}\right)^3\right|} = \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(f_\xi(1/\sqrt{y}) + f_\xi(-1/\sqrt{y})\right).$$

Variabila aleatoare ξ este distribuită uniform; atunci:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, \text{ dacă } x \in [-c;c], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

De aici rezultă:

$$f_\xi(1/\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, \text{ dacă } \sqrt{y} \in (-\infty;-1/c] \cup [1/c;\infty), \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2c}, \text{ dacă } y \in [1/c^2;\infty), \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

$$f_\xi(-1/\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, \text{ dacă } -\sqrt{y} \in (-\infty; -1/c] \cup [1/c; \infty), \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2c}, \text{ dacă } y \in [1/c^2; \infty), \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Atunci:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2c} y^{-\frac{3}{2}}, \text{ dacă } y \in [1/c^2; \infty), \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare η este:

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} f_\eta(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y < 1/c^2, \\ 1 - \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}, \text{ dacă } y \in [1/c^2; \infty). \end{cases}$$

■

Exemplul 4.4 *Un semnal aleator cu distribuţie normală* $N(0, \sigma^2)$, *(de medie nulă şi varianţă* σ^2*) se redresează cu o diodă ideală. Să se calculeze densitatea de probabilitate a semnalului redresat.*

Rezolvare: Funcţia de transformare realizată de circuitul redresor monoalternanţă (o diodă ideală) este:

$$g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

Funcţia $g(x)$ nu este bijectivă; în cazul acestei funcţii nu se poate aplica formula (4.4) deoarece muţimea soluţiilor ecuaţiei $y = g(x)$ pentru $x < 0$ nu este numărabilă; mai precis $\{x \in R | g(x) = 0\} = (-\infty; 0]$. Problema se va rezolva prin determinarea funcţiei de repartiţie $F_\eta(y) = P\{\eta \leqslant y\}$.

Dacă $y < 0$, $F_\eta(y) = P\{\eta \leqslant y\} = P\{\eta < 0\} = 0$.

Dacă $y = 0$, $F_\eta(y) = P\{\eta \leqslant 0\} = P\{\eta = 0\} = P\{\xi \leqslant 0\} = F_\xi(0) = 0.5$.

Dacă $y > 0$, $F_\eta(y) = P\{\eta \leqslant y\} = P\{\xi \leqslant x\} = F_\xi(x)$. În concluzie,

$$F_\eta(y) = \begin{cases} F_\xi(y), \text{ dacă } y \geqslant 0, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Funcţia de densitate de probabilitate căutată va fi derivata lui $F_\eta(y)$; adică:

$$f_\eta(y) = \frac{dF_\eta(y)}{dy} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y < 0, \\ 0.5\delta(y) + N(0, \sigma^2)U(y), \text{ pentru } y \geqslant 0. \end{cases},$$

unde U este funcţia treaptă unitate. Ceea ce se remarcă este că variabila aleatoare η are probabilitate concentrată în origine - adică probabilitatea de a obţine valoarea 0 este nenulă:

$$P\{\eta = 0\} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\eta(y)dy = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(y)dy + \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{0}^{\varepsilon} f_\xi(x)dx = \frac{1}{2}.$$

■

Exemplul 4.5 *Să se determine funcţia de transformare a unei distribuţii uniforme în intervalul* $[0;1]$ *într-o distribuţie Rayleigh.*

Rezolvare: Fie ξ variabila aleatoare distribuită uniform şi η variabila aleatoare distribuită Rayleigh. Atunci:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [0;1], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases},$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{y}{\alpha^2} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}}, \text{ dacă } y \geqslant 0, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Suporturile celor două funcţii de densitate de probabilitate sunt $[0;1]$, respectiv $[0;\infty)$, şi atunci funcţia de transformare necunoscută trebuie să fie $g : [0;1] \longrightarrow [0;\infty)$.

Să presupunem că funcţia g căutată este bijectivă; atunci, conform (4.3) avem:

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(g^{-1}(y)\right) \frac{1}{|g'\left(g^{-1}(y)\right)|}.$$

Inversa funcţiei de transformare există şi este $g^{-1} : [0;\infty) \longrightarrow [0;1]$. Acesta înseamnă că $f_\xi\left(g^{-1}(y)\right) = 1$ şi deci:

$$\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right| = f_\eta(y).$$

Dar, deoarece g este bijectivă, atunci este strict monotonă. Impunând $g(0) = 0$, rezultă că funcţia nu poate fi decât crescătoare, şi atunci derivata sa este pozitivă.

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = f_\eta(y),$$

$$g^{-1}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_\eta(t)dt = \int_0^y \frac{t}{\alpha^2} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} dt = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} = x.$$

De aici se evaluează y în funcţie de x şi atunci:

$$y = \sqrt{-2\alpha^2 \ln(1-x)}.$$

Deci $g(x) = \sqrt{-2\alpha^2 \ln(1-x)}$.

■

Exemplul 4.6 *Să se arate că dacă* ξ *este o variabilă aleatoare cu distribuţie oarecare, funcţia ei de repartiţie o transformă într-o variabilă aleatoare* η *cu distribuţie uniformă în intervalul* $[0;1]$.

Rezolvare: Dacă densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare ξ este $f_\xi(x)$ atunci funcţia de repartiţie asociată este $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$. Dacă aceasta este şi funcţia de transformare a variabilei aleatoare, atunci $g(x) = F_\xi(x)$, cu $g : R \longrightarrow [0;1]$. Derivata funcţiei de transformare este:

$$g'(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = f_\xi(x),$$

iar $|g'(x)| = |f_\xi(x)| = f_\xi(x)$ (pentru că funcţia de densitate de probabilitate este pozitivă). Atunci, conform (4.3) avem:

$$f_\eta(y) = f_\xi(x)\frac{1}{|g'(x)|}\Big|_{x=g^{-1}(y)} = f_\xi(x)\frac{1}{f_\xi(x)}\Big|_{x=F_\xi^{-1}(y)} = 1, \text{ pentru } y \in [0;1].$$

Acesta este într-adevăr o distribuţie uniformă în intervalul $[0;1]$.

■

4.2 Probleme propuse

Tema 4.1 *Puterea disipată într-o rezistenţă $R = 1k\Omega$ este modelată ca o variabilă aleatoare, cu distribuţie uniformă în intervalul $[P_{\min}; P_{\max}] = [1W; 10W]$. Care este distribuţia curentului prin rezistenţă ?*

Tema 4.2 *Să se determine funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare $\eta = -\xi$ (cunoscând $f_\xi(x)$).*

Tema 4.3 *La bornele unui generator de curent se conectează o rezistenţă constantă R. Curentul generat este considerat o variabilă aleatoare, distribuită uniform în intervalul $[I_{\min}; I_{\max}]$. Să se calculeze puterea medie disipată în rezistenţă şi distribuţia puterii disipate.*

Tema 4.4 *Să se demonstreze (folosind teorema mediei (4.5)) că pentru o funcţie de transformare liniară ($g(x) = \alpha x + \beta$) varianţa variabilei aleatoare transformate este de α^2 mai mare ca varianţa variabilei aleatoare iniţiale, iar media variabilei aleatoare transformate este media variabilei aleatoare iniţiale trasnformate prin funcţia liniară $g(x)$.*

Tema 4.5 *Să se determine funcţia de densitate de probabilitate ce caracterizează informaţia ce rezultă din producerea unui eveniment, a cărui probabilitate de apariţie este distribuită uniform.*

Tema 4.6 *Să se calculeze informaţia medie ce rezultă în urma realizării unui eveniment, a cărui probabilitate este distribuită după legea $1/x$ în intervalul $[\alpha; 1]$?*

Tema 4.7 *Tensiunea anodică a unei diode cu vid este distribuită uniform în intervalul $[a; b]$. Care este distribuţia şi media curentului anodic al diodei ? (Curentul anodic este dat de legea $i_a = Au_a^{3/2}$).*

Tema 4.8 *Măsurând curentul anodic al unei diode cu vid, se constată că acesta are o distribuţie liniară între 0 şi $\sqrt{2}mA$. Tensiunea anodică a diodei cu vid provine de la un generator de tensiune ce trebuie testat (dispersia tensiunii livrate nu trebuie să fie mai mare de $20V$). Dacă $A = \sqrt{2}/1000\ mA/V^{3/2}$ generatorul testat satisface criteriul de calitate ?*

Tema 4.9 *Un generator ideal de tensiune livrează la borne tensiunea continuă constantă* E *cu care se alimentează un aparat ce are rezistenţa echivalentă de intrare* R. *Din cauza variaţiei parametrilor componentelor constructive ale aparatului, rezistenţa* R *poate fi modelată ca o variabilă aleatoare cu distribuţie uniformă în intervalul* $[R_{\min}; R_{\max}]$. *Care este distribuţia şi valoarea medie a curentului livrat de generator ?*

Tema 4.10 *O reţea de comunicaţii pe fibră optică are o topologie în stea: toate terminalele sunt conectate cu un unic nod central. Pătratul distanţei dintre fiecare punct terminal al reţelei şi nodul central este distribuit în intervalul* $[a; b]$ *după o funcţie de densitate de probabilitate de tip* $1/\sqrt{x}$, *iar cantitatea de informaţii transmise este distribuită uniform în intervalul* $[0; M]$. *Ce este mai eficient pentru provider: să stabilească preţul comunicaţiei după raza medie a reţelei sau după cantitatea medie de informaţie transmisă ?*

Tema 4.11 *La bornele unei diode semiconductoare se aplică o tensiune pozitivă (variabilă aleatoare). Care este distibuţia curentului prin diodă ? (*$I = I_0(e^{-kV} - 1)$*).*

Tema 4.12 *Fie* ξ *o variabilă aleatoare distribuită uniform în intervalul* $(0; \pi)$ *şi fie funcţia* $g : (0; \pi) \longrightarrow (-1; 1)$, *cu* $g(x) = \cos(x)$. *Variabila aleatoare* η *este dată de* $\eta = g(\xi)$. *Să se determine funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare* η.

Tema 4.13 *Funcţia (caracteristica) de transfer a unui redresor bialternanţă ideal este descrisă de funcţia* $g(x) = |x|$. *Să se calculeze funcţia de densitate de probabilitate, valoarea medie şi puterea medie a semnalului aleator* $\xi(t)$ *redresat, dacă* $\xi(t)$ *este a) distribuit normal* $N(0, \sigma^2)$, *b) distribuit uniform în* $[-1; 1]$ *şi* $[0; 1]$.

Tema 4.14 *Se consideră variabila aleatoare* ξ, *uniform distribuită în intervalul* $[-c; c]$. *Să se determine densitatea de probabilitate şi funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare* $\eta = \xi^p$, *unde* p *este un număr natural.*

Tema 4.15 *Dându-se transformarea* $y = g(x)$ *definită de:*

$$g(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{dacă}\ x < -a, \\ -\frac{x}{a}, \ \textit{dacă}\ x \in [-a; a], \\ -1, \ \textit{dacă}\ x > 0. \end{cases}$$

cu $a \in [0; 10]$ *ce se aplică variabilei aleatoare* ξ *distribuită uniform în* $[-3; 1]$, *să se determine funcţiile de densitate de probabilitate ale variabilelor aleatoare* ξ *şi* $g(\xi)$. *Ce constrângeri trebuie să se impună constantei* a *pentru ca variabila aleatoare* $\eta = g(\xi)$ *să fie distribuită tot uniform ? Există vreo valoare pentru* a *astfel încât* η *să fie distribuit normal ?*

Tema 4.16 *Din variabila aleatoare normală* ξ $(N(0, \sigma^2))$ *se construieşte variabila aleatoare* $\eta = e^{-|\xi|}$. *Să se calculeze funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare* η *şi momentele statistice de ordinul 1 şi 2 ale acesteia; să se calculeze probabilitatea* $P\{\eta < 0.1\}$. *Ce se întâmplă dacă* $\sigma \longrightarrow 0$ *sau dacă* $\sigma \longrightarrow \infty$ *?*

Tema 4.17 *Să se determine funcţia crescătoare, neliniară, $y = g(x)$ (a cărei inversă este $x = h(y)$) care transformă variabila aleatoare ξ cu distribuţia:*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0.5, \text{ dacă } |x| < 1, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

în variabila aleatoare η cu distribuţia:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}y, \text{ dacă } |y| < 1, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se justifice de ce forma funcţiei $y = g(x)$ în afara intervalului $[-1; 1]$ nu are nici o influenţă asupra densităţii de probabilitate a variabilei aleatoare η. Să se calculeze derivata funcţiei inverse $h(y)$ pentru $y \in [-1; 1]$, cu ipoteza că aceasta este pozitivă. Să se determine funcţia inversă, cu condiţia suplimentară $h(0) = 0$.

Tema 4.18 *Se dau cercuri de raze diferite; raza r şi aria A a acestora sunt modelate ca variabile aleatoare; se ştie că razele cercurilor sunt distribuite uniform între $a = 4$ cm şi $b = 6$ cm. Să se calculeze probabilităţile $P\{A \leqslant A_0\}$ şi $P\{60 \text{ cm}^2 \leqslant A \leqslant 70 \text{ cm}^2\}$. Să se determine funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare A.*

Tema 4.19 *La intrarea unui circuit neliniar având funcţia (caracteristica) de transfer*

$$y = g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0, \\ \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}), \text{ dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

se aplică semnalul aleator cu distribuţia $f_X(x) = e^{-2|x|}$. Să se determine $P\{Y < 0\}$ şi $P\{Y = 0\}$; să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua Y; să se calculeze funcţia de repartiţie pentru variabila aleatoare Y.

Tema 4.20 *Un limitator neliniar are funcţia (caracteristica) de transfer:*

$$y = g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ x, \text{ dacă } x \in (0; 1], \\ 1, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$$

La intrarea circuitului se aplică un semnal cu densitatea de probabilitate $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-2|x|} + \frac{1}{2}\delta(x)$. Să se determine distribuţia semnalului de ieşire.

Tema 4.21 *Un redresor cu limitare are caracteristica de transfer*

$$y = g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ kx^2, \text{ dacă } x \in (0; 1], \\ k, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$$

La intrarea circuitului se aplică un semnal cu densitatea de probabilitate:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x + 1), \text{ dacă } x \in [-1; 0], \\ c, \text{ dacă } x \in [0; 1], \\ c(2 - x), \text{ dacă } x \in [1; 2]. \end{cases}$$

Să se determine constanta k; să se calculeze funcţia de densitate de probabilitate a semnalului de la ieşirea circuitului şi să se determine valoarea lui c pentru care media statistică a semnalelor de intrare şi ieşire este aceeaşi.

Tema 4.22 *La controlul unei serii de rezistoare cu valoarea nominală de 1 kΩ se constată distribuţia uniformă a acestora între 800 Ω şi 1200 Ω. Variabila aleatoare R semnifică valoarea rezistenţei normate la valoarea nominală; corespunzător, $G = \frac{1}{R}$ este conductanţa normată a rezistorului. Să se calculeze conductanţa medie folosind teorema mediei; să se calculeze distribuţia conductanţei; care este probabilitatea ca G să depăşească cu mai mult de 10% valoarea sa nominală ?*

Tema 4.23 *Din variabila aleatoare ξ cu distribuţia*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2}x, \text{ dacă } x \in [0; 2], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

se construieşte variabila aleatoare η, pe baza funcţiei $y = \sin \frac{\pi}{2}x$. Care este probabilitatea $P\{\eta = 1\}$; să se determine distribuţia lui η. Să se evalueze $\lim\limits_{y \longrightarrow 1} f_\eta(y)$.

Tema 4.24 *Din variabila aleatoare ξ distribuită uniform în intervalul $[-2; 2]$ se construieşte variabila aleatoare $\eta = e^{\xi/2}$. Să se calculeze: $P\{\eta > 0\}$, $P\{\eta > 1\}$, $P\{\eta > \sqrt{e}\}$, $f_\eta(y)$.*

Tema 4.25 *Un circuit are funcţia (caracteristica) de transfer:*

$$y = g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x < -3, \\ x + 2, \text{ dacă } x \in [-3; -1), \\ x, \text{ dacă } x \in [-1; 1), \\ x - 2, \text{ dacă } x \in [1; 3), \\ -1, \text{ dacă } x \geqslant 3. \end{cases}$$

La intrarea circuitului se aplică un semnal a cărui valori sunt distribuite după o lege uniformă în intervalul $[-4; 4]$. Să se calculeze densitatea de probabilitate a semnalului de la ieşirea circuitului şi să se determine $P\{y = 1\}$, $P\{x \leqslant -3\}$.

Capitolul 5

Caracterizarea unei perechi de variabile aleatoare

5.1 Funcţia de repartiţie

În cazul în care se doreşte caracterizarea simultană a două variabile aleatoare (deci definite pe un domeniu bidimensional de valori), definiţiile cazului unidimensional (o singură variabilă aleatoare) trebuiesc extinse. Funcţia de repartiţie a unei perechi de variabile aleatoare (sau funcţia de repartiţie de ordinul doi) este definită ca:

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P\{\xi \leqslant x \text{ şi } \eta \leqslant y\}. \tag{5.1}$$

Acestă funcţie de repartiţie are proprietăţi analoage celei unidimensionale: are valori cuprinse în intervalul $[0;1]$ (pentru că este o probabilitate) şi are limitele de la capetele intervalelor de definiţie date de:

$$F_{\xi\eta}(-\infty,y) = F_{\xi\eta}(x,-\infty) = 0,$$

$$F_{\xi\eta}(\infty,y) = \lim_{x\longrightarrow\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\eta}(y) \text{ şi } F_{\xi\eta}(x,\infty) = \lim_{y\longrightarrow\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi}(x).$$

În fine, probabilitatea ca perechea de variabile aleatoare să aibă valorile cuprinse într-un interval (deci domeniu spaţial) este dată de:

$$P\{x_1 < \xi \leqslant x_2 \text{ şi } y_1 < \eta \leqslant y_2\} = F_{\xi\eta}(x_2,y_2) + F_{\xi\eta}(x_1,y_1) - F_{\xi\eta}(x_1,y_2) - F_{\xi\eta}(x_2,y_1).$$

5.2 Funcţia de densitate de probabilitate

Funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi (deci a perechii de variabile aleatoare) se obţine ca:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x \partial y}. \tag{5.2}$$

Aceasta înseamnă că funcţia de repartiţie este în continuare primitiva funcţiei de densitate de probabilitate

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)dudv.$$

Funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi respectă în continuare condiţia de normare:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1.$$

În plus, din funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi se pot obţine funcţiile de densitate de probabilitate ale variabilelor aleatoare individuale; aceste funcţii de densitate de probabilitate se numesc marginale, fiind proiecţii ale funcţiei de ordinul doi pe axele reale:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy \text{ şi } f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dx. \tag{5.3}$$

5.3 Momente statistice asociate unei perechi de variabile aleatoare

Şi momentele statistice asociate perechii de variabile aleatoare provin din extinderea definiţiilor introduse în cazul unei singure variabile aleatoare. Momentul statistic necentrat de ordinele k_1 şi k_2 (evident numere naturale) va fi definit ca:

$$m_{k_1,k_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{k_1} y^{k_2} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy. \tag{5.4}$$

Momentul statistic centrat de ordinele k_1 şi k_2 (evident numere naturale) va fi definit ca:

$$M_{k_1,k_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{\xi})^{k_1}(y-\overline{\eta})^{k_2} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy. \tag{5.5}$$

Cazurile particulare de interes sunt: momentul statistic necentrat de ordinele 1 şi 1, numit corelaţia dintre variabilele aleatoare ξ şi η (sau intercorelaţia dintre variabilele aleatoare), notat $B_{\xi\eta}$ şi momentul statistic centrat de ordinele 1 şi 1, numit covariaţia dintre variabilele aleatoare ξ şi η, notat $K_{\xi\eta}$.

$$B_{\xi\eta} = \overline{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi\eta}(x,y)dxdy; \tag{5.6}$$

$$K_{\xi\eta} = \overline{(\xi-\overline{\xi})(\eta-\overline{\eta})} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{\xi})(y-\overline{\eta}) f_{\xi\eta}(x,y)dxdy. \tag{5.7}$$

Se poate arăta prin dezvoltarea produsului de variabile aleatoare centrate din definiţie că:

$$K_{\xi\eta} = \overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\,\overline{\eta} = B_{\xi\eta} - \overline{\xi}\,\overline{\eta}. \tag{5.8}$$

Coeficientul de corelaţie dintre variabilele aleatoare ξ şi η este definit ca:

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{\sigma_\xi^2 \sigma_\eta^2}}. \tag{5.9}$$

Folosind (5.8) şi relaţia dintre varianţa, media şi media pătratică a unei variabile aleatoare (2.18), obţinem formula echivalentă:

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\,\overline{\eta}}{\sqrt{\overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2}\sqrt{\overline{\eta^2} - \overline{\eta}^2}}. \tag{5.10}$$

5.4 Variabile aleatoare independente şi necorelate

Două variabile aleatoare ξ şi η se numesc necorelate dacă coeficientul de corelaţie dintre ele este nul:

$$\rho_{\xi\eta} = 0 \Longleftrightarrow \xi \text{ şi } \eta \text{ sunt necorelate.}$$

Două variabile aleatoare ξ şi η se numesc independente dacă funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi (a perechii de variabile aleatoare) este separabilă după funcţiile de densitate de probabilitate marginale (ale fiecărei variabile aleatoare):

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

5.5 Funcţii de două variabile aleatoare

Fie perechea de variabile aleatoare ξ_1 şi ξ_2; din acestea se obţine o altă pereche de variabile aleatoare prin transformările bijective $\eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2)$ şi $\eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2)$. Cu o demonstraţie analoagă celei din cazul funcţiilor de o variabilă aleatoare (dar aici vom considera probabilitate ca perechea de variabile aleatoare să aparţină unui domeniu spaţial infinitezimal centrat într-un punct) se obţine că:

$$f_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{array} \right| f_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) \Big|_{x_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2) \text{ şi } x_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2)}. \tag{5.11}$$

Determinantul ce apare în expresia (5.11) este inversul jacobianului transformării de două variabile $x_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2)$ şi $x_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2)$.

5.6 Probleme rezolvate

Exemplul 5.1 *Să se demonstreze că modulul coeficientului de corelaţie a oricăror două variabile aleatoare este subunitar, adică* $\left|\rho_{\xi\eta}\right| \leqslant 1$.

Rezolvare: Problema impune deci ca pentru $\forall\ \xi, \eta : \Omega \longrightarrow R$, $\left|\rho_{\xi\eta}\right| \leqslant 1$; adică $\rho_{\xi\eta}^2 \leqslant 1$, sau, folosind relaţia (5.10),

$$\left(\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta}\right)^2 \leqslant \left(\overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2\right)\left(\overline{\eta^2} - \overline{\eta}^2\right). \tag{5.12}$$

Se observă că $\overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 = \left(\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta}\right)|_{\eta=\xi}$ şi $\overline{\eta^2} - \overline{\eta}^2 = \left(\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta}\right)|_{\xi=\eta}$. Dacă notăm cu $g(\xi, \eta) = \overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta}$, atunci (5.12) poate fi exprimată ca:

$$g^2(\xi, \eta) \leqslant g(\xi, \xi)g(\eta, \eta). \tag{5.13}$$

O inegalitate de asemenea formă seamănă cu inegalitatea Schwartz (sau Cauchy Buniakowski Schwartz), care afirmă că, dacă $\langle , \rangle$ este un produs scalar, atunci:

$$\langle a, b\rangle^2 \leqslant \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle = \|a\|^2 \|b\|^2. \tag{5.14}$$

Deci, dacă demonstrăm că $g(\xi, \eta) = \overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta} = \langle \xi, \eta\rangle$ este un produs scalar peste spaţiul variabilelor aleatoare, (5.13) nu este altceva decât ecuaţia Cauchy (5.14) şi problema este rezolvată. Dar $g(\xi, \eta)$ este un produs scalar, deoarece verifică proprietăţile acestuia:

1. $\langle \xi, a\eta\rangle = \langle a\xi, \eta\rangle = a\langle \xi, \eta\rangle$,
2. $\langle \xi_1 + \xi_2, \eta\rangle = \langle \xi_1, \eta\rangle + \langle \xi_2, \eta\rangle$,
3. $\langle \xi, \eta_1 + \eta_2\rangle = \langle \xi, \eta_1\rangle + \langle \xi, \eta_2\rangle$.

■

Exemplul 5.2 *Fie două variabile aleatoare ξ şi η caracterizate de distribuţia $f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{y}{(1+x)^4}\exp(-\frac{y}{(1+x)})$, cu $x \geqslant 0$ şi $y \geqslant 0$. Să se determine funcţiile de densitate de probabilitate a variabilelor aleatoare definite de $U = \frac{\eta}{1+\xi}$ şi $V = \frac{1}{1+\xi}$.*

Rezolvare: Cele două noi variabile aleatoare sunt definite pe baza funcţiilor $u = g_1(x, y) = \frac{y}{1+x}$ şi $v = g_2(x, y) = \frac{1}{1+x}$, cu $g_1, g_2 : [0; \infty) \times [0; \infty) \longrightarrow [0; \infty) \times [0; 1]$. Funcţiile inverse sunt: $x = g_1^{-1}(u, v) = \frac{1}{v} - 1$ şi $y = g_2^{-1}(u, v) = \frac{u}{v}$. Conform formulei de calcul a densităţii de probabiltate de ordinul doi în urma unei transformări (5.11) trebuie mai întâi calculat inversul jacobianului transformării, adică:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{v^2} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v^3}.$$

Atunci noua densitate de probabilitate este:

$$f_{UV}(u, v) = \frac{1}{v^3} f_{\xi\eta}(x, y)\Big|_{x=\frac{1}{v}-1 \text{ şi } y=\frac{u}{v}} = \frac{1}{v^3}\frac{u}{v}v^4 \exp(-\frac{u}{v}v) = u\exp(-u).$$

Funcţiile de densitate de probabilitate $f_U(u)$ şi $f_V(v)$ sunt funcţiile de densitate de probabilitate marginală, şi sunt obţinute conform (5.3):

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u, v)du = \int_0^{\infty} u\exp(-u)du = 1, \text{ pentru } v \in [0; 1],$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)dv = \int_0^1 u\exp(-u)dv = u\exp(-u), \text{ pentru } u \in [0;\infty).$$

■

Exemplul 5.3 *Fie două variabile aleatoare ξ şi η caracterizate de distribuţia:*

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-(x+y)\right), \ \text{dacă } x \geqslant 0 \text{ şi } y \geqslant 0, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se determine funcţiile de densitate de probabilitate a variabilelor aleatoare U şi V definite de $U = \xi + \eta$ şi $V = \xi/\eta$. Să se determine probabilităţile $P\{x \leqslant 2y\}$, $P\{x \leqslant 1\}$, $P\{x > 1\}$, $P\{x = y\}$.

Rezolvare: Cele două noi variabile aleatoare sunt definite pe baza funcţiilor $u = g_1(x,y) = x + y$ şi $v = g_2(x,y) = \frac{x}{y}$, cu $g_1, g_2 : [0;\infty) \times [0;\infty) \longrightarrow [0;\infty) \times [0;\infty)$. Funcţiile inverse sunt: $x = g_1^{-1}(u,v) = \frac{uv}{v+1}$ şi $y = g_2^{-1}(u,v) = \frac{u}{v+1}$. Conform formulei de calcul a densităţii de probabiltate de ordinul doi în urma unei transformări (5.11) trebuie mai întâi calculat inversul jacobianului transformării, adică:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

Atunci noua densitate de probabilitate este:

$$f_{UV}(u,v) = \frac{u}{(v+1)^2} f_{\xi\eta}(x,y) \Big|_{x=\frac{uv}{v+1} \text{ şi } y=\frac{u}{v+1}} = \frac{u}{(v+1)^2}\exp(-u), \text{ dacă } u,v \in [0;\infty).$$

Funcţiile de densitate de probabilitate $f_U(u)$ şi $f_V(v)$ sunt funcţiile de densitate de probabilitate marginală, şi sunt obţinute conform (5.3):

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)du = \int_0^{\infty} \frac{u}{(v+1)^2}\exp(-u)du = \frac{1}{(v+1)^2}, \text{ pentru } v \in [0;\infty);$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)dv = \int_0^{\infty} \frac{u}{(v+1)^2}\exp(-u)dv = u\exp(-u), \text{ pentru } u \in [0;\infty).$$

Pentru a calcula probabilităţile cerute este nevoie de funcţiile de densitate de probabilitate a variabilelor aleatoare ξ şi η, care sunt tot densităţi de probabilitate marginale:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy = \int_0^{\infty} \exp(-(x+y))dy = \exp(-x), \text{ pentru } x \in [0;\infty);$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dx = \int_0^{\infty} \exp(-(x+y))dx = \exp(-y), \text{ pentru } y \in [0;\infty).$$

$$P(x \leqslant 1) = \int_0^1 f_\xi(x)dx = \int_0^1 \exp(-x)dx = -\exp(-x)\,\big|_0^1 = 1 - e^{-1}\ ;$$

$$P(x > 1) = 1 - P(x \leqslant 1) = e^{-1};$$

$$P(x \leqslant 2y) = \int_0^\infty \int_{x\leqslant 2y} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = \int_0^\infty e^{-y}dy \int_0^{2y} e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-2y})dy = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$P(x = y) = \int_0^\infty \int_{x=y} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 0.$$

■

Exemplul 5.4 *Dacă ξ şi η sunt variabile aleatoare independente, să se determine funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare obţinută ca $\gamma = \xi + \eta$ în funcţie de densităţile de probabilitate a celor două variabile aleatoare iniţiale.*

Rezolvare: Ceea ce se doreşte este funcţia de densitate de probabilitate $f_\gamma(z) = \frac{dF_\gamma(z)}{dz}$. Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare este, prin definiţie:

$$F_\gamma(z) = P\{\gamma \leqslant z\} = P\{\xi + \eta \leqslant z\}.$$

Interpretarea geometrică a probabilităţilor (ca aria subgraficului funcţiei de densitate de probabilitate pe un anumit domeniu) conduce la:

$$F_\gamma(z) = \iint_{D_z} f_\gamma(z)dz = \iint_{D_z} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = \iint_{D_z} f_\xi(x)f_\eta(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y)dy \int_{-\infty}^{z-y} f_\xi(x)dx.$$

Dar:

$$f_\gamma(z) = \frac{dF_\gamma(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y)dy \int_{-\infty}^{z-y} f_\xi(x)dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y)f_\xi(z-y)dy = f_\xi(z)f_\eta(z) =$$

$$= f_\xi(z) * f_\eta(z).$$

Deci densitatea de probabilitate a sumei de variabile aleatoare independente este produsul de convoluţie a densităţilor de probabilitate a variabilelor aleatoare ce se sumează:

$$f_\gamma(z) = f_\xi(z) * f_\eta(z). \tag{5.15}$$

■

Exemplul 5.5 *Se consideră variabilele aleatoare independente ξ şi η distribuite normal după legea $N(a, \sigma^2)$. Să se calculeze coeficientul de corelaţie şi legea de distribuţie a variabilelor aleatoare $\gamma_1 = \alpha\xi + \beta\eta$ şi $\gamma_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.*

Rezolvare: Conform definiţiei (5.10), coeficientul de corelaţie a variabilelor aleatoare γ_1 şi γ_2 este:

$$\rho_{\gamma_1\gamma_2} = \frac{\overline{\gamma_1\gamma_2} - \overline{\gamma_1}\ \cdot \overline{\gamma_2}}{\sqrt{\overline{\gamma_1^2} - \overline{\gamma_1}^2}\sqrt{\overline{\gamma_2^2} - \overline{\gamma_2}^2}}.$$

Vom evalua pe rând expresiile necesare:

$$\overline{\gamma_1\gamma_2} = \overline{(\alpha\xi + \beta\eta)(\alpha\xi - \beta\eta)} = \overline{\alpha^2\xi^2 - \beta^2\eta^2} = \alpha^2\overline{\xi^2} - \beta^2\overline{\eta^2};$$

$$\overline{\gamma_1}\ \cdot \overline{\gamma_2} = \overline{(\alpha\xi + \beta\eta)(\alpha\xi - \beta\eta)} = (\alpha\overline{\xi} + \beta\overline{\eta})(\alpha\overline{\xi} - \beta\overline{\eta}) = \alpha^2\overline{\xi}^2 - \beta^2\overline{\eta}^2;$$

$$\overline{\gamma_1\gamma_2} - \overline{\gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2} = \alpha^2\overline{\xi^2} - \beta^2\overline{\eta^2} - (\alpha^2\overline{\xi}^2 - \beta^2\overline{\eta}^2) = \alpha^2(\overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2) - \beta^2(\overline{\eta^2} - \overline{\eta}^2) = \alpha^2\sigma_\xi^2 - \beta^2\sigma_\eta^2.$$

Dar, din enunţ, $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma^2$ şi atunci:

$$\overline{\gamma_1\gamma_2} - \overline{\gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2} = \sigma^2(\alpha^2 - \beta^2).$$

Apoi:

$$\overline{\gamma_1^2} = \overline{(\alpha\xi + \beta\eta)^2} = \overline{\alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 + 2\alpha\beta\xi\eta} = \alpha^2\overline{\xi^2} + \beta^2\overline{\eta^2} + 2\alpha\beta\overline{\xi\eta}.$$

Dar variabilele aleatoare ξ şi η sunt independente, şi atunci $\overline{\xi\eta} = \overline{\xi}\overline{\eta}$; iar $\overline{\xi} = \overline{\eta} = a$ şi $\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \sigma^2 + a^2$.

$$\overline{\gamma_1^2} = (\alpha^2 + \beta^2)(\sigma^2 + a^2) + 2\alpha\beta a^2,$$

$$\overline{\gamma_1} = \overline{\alpha\xi + \beta\eta} = \alpha\overline{\xi} + \beta\overline{\eta} = a(\alpha + \beta).$$

Atunci:

$$\sqrt{\overline{\gamma_1^2} - \overline{\gamma_1}^2} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\sigma^2 + a^2) + 2\alpha\beta a^2 - a^2(\alpha + \beta)^2} = \sigma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Calcule asemănătoare ne conduc la:

$$\sqrt{\overline{\gamma_2^2} - \overline{\gamma_2}^2} = \sigma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Atunci coeficientul de corelaţie va fi:

$$\rho_{\gamma_1\gamma_2} = \frac{\sigma^2(\alpha^2 - \beta^2)}{\left(\sigma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Distribuţia unei sume de variabile aleatoare normale este tot normală; atunci γ_1 şi γ_2 sunt distribuite după $N(a(\alpha + \beta), \sigma^2(\alpha^2 + \beta^2))$ şi $N(a(\alpha - \beta), \sigma^2(\alpha^2 + \beta^2))$.

■

5.7 Probleme propuse

Tema 5.1 *Se dau două generatoare independente de numere aleatoare discrete, X şi Y. Generatorul binar X livrează numerele 1 şi 2 cu probabilităţi egale; pentru generatorul ternar Y se ştiu $P\{y = 1\} = 0.25$, $P\{y = 2\} = 0.5$, $P\{y = 3\} = 0.25$. Să se determine funcţiile de densitate de probabilitate a perechii de variabile aleatoare, $f_{XY}(x, y)$ şi funcţiile de densitate de probabilitate marginală corespunzătoare. Se construiesc două noi variabile aleatoare ξ şi η definite ca $\xi = X + Y$, $\eta = XY$. Să se determine funcţiile de densitate de probabilitate a perechii de variabile aleatoare, $f_{\xi\eta}(x, y)$ şi funcţiile de densitate de probabilitate marginală corespunzătoare. Să se calculeze covariaţia şi coeficientul de corelaţie dintre variabilele aleatoare ξ şi η; sunt acestea independente ?*

Tema 5.2 *Se dă funcţia de densitate de probabilitate*

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} xy + y, \text{ dacă } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ şi } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se reprezinte grafic domeniul de definiţie (suportul) şi funcţia de densitate de probabilitate; să se determine funcţiile de densitate de probabilitate marginale ale variabilelor aleatoare ξ şi η, coeficientul de corelaţie şi covariaţia dintre acestea. Să se determine funcţia de repartiţie a perechii de variabile aleatoare şi să se calculeze probabilităţile $P\{(\xi \leqslant 0) \cap (\eta \leqslant 0.5)\}$ şi $P\{(\xi > 0) \cap (\eta > 0.5)\}$.

Tema 5.3 *Se dau variabilele aleatoare X şi Y, distribuite normal, cu medie nulă şi varianţe σ_X^2 şi σ_Y^2. Funcţia de densitate de probabilitate a perechii de variabile aleatoare este:*

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{4x^2+y^2-4xy\rho}{2(1-\rho^2)}}.$$

Să se determine funcţiile de densitate de probabilitate marginale; cum trebuie să fie valorile lui ρ pentru ca variabilele aleatoare X şi Y să fie puternic, respectiv slab corelate ? Să se calculeze varianţele variabilelor aleatoare X şi Y. Variabila aleatoare Z este definită ca $Z = X^2 + Y^2$; să se calculeze varianţa acesteia (se ştie că momentul de ordinul 4 al unei gaussiene $N(0, \sigma^2)$ este $m_4 = 3\sigma^4$). Pe ce drepte $y = kx$ se află perechile de valori (x, y) pentru care $f_{XY}(x, y)$ este nenulă ?

Tema 5.4 *La intrarea unui circuit discriminator de semn, caracterizat de ieşirea* $y = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \geqslant 0, \\ -1, \text{ în rest.} \end{cases}$ *se aplică un semnal $x(t)$ ce poate lua cu probabilităţi egale valorile $\{-3, -1, 1, 3\}$. Să se calculeze funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi, funcţiile de densitate de probabilitate marginală şi coeficientul de corelaţie între variabila aleatoare de ieşire şi cea de intrare.*

Tema 5.5 *Se dau variabilele aleatoare u, v, w, independente de medie nulă şi varianţă σ^2. Pe baza lor se construiesc variabilele aleatoare $X = u + \alpha v$ şi $Y = u - \alpha w$. Să se calculeze media şi varianţa variabilelor aleatoare X şi Y, coeficientul lor de corelaţie şi să se discute independenţa variabilelor aleatoare X şi Y în funcţie de α.*

Tema 5.6 *Funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi* $f_{XY}(x, y)$ *este constantă pe domeniul spaţial definit de triunghiul de vârfuri* $(0, 1)$, $(3, 4)$, $(5, 4)$ *şi nulă în rest. Să se determine expresia analitică a funcţiei* $f_{XY}(x, y)$, *să se calculeze densităţile de probabilitate marginale, mediile şi varianţele variabilelor aleatoare* X *şi* Y. *Să se calculeze probabilităţile* $P\{X > Y\}$, $P\{X > 3|Y > 2\}$, $P\{X > Y|X > 4\}$. *Să se calculeze momentul* $m_{XY} = \overline{XY}$ *şi coeficientul de corelaţie a variabilelor aleatoare.*

Tema 5.7 u *şi* v *sunt variabile aleatoare de medie* m *şi varianţă* σ^2; *pe baza lor se construiesc variabilele aleatoare* $\xi = au - bv$ *şi* $\eta = au + bv$. *Să se calculeze media şi varianţa noilor variabile aleatoare, precum şi coeficientul lor de corelaţie. Dacă variabilele aleatoare* u *şi* v *ar lua doar valorile* 0 *şi* 1, *să se calculeze funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi* $f_{\xi\eta}(x, y)$.

Tema 5.8 *Funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi* $f_{\xi\eta}(x, y)$ *este reprezentată prin impulsuri Dirac plasate în punctele:*

$$\{(-2, 0), (-2, -1), (-1, -1), (0, -2), (0, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$$

având amplitudinile corespunzătoare:

$$\{0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1\}.$$

Să se determine forma analitică a acestei funcţii şi să se calculeze funcţiile de densitate de probabilitate marginală, coeficientul de corelaţie a perechii de variabile aleatoare şi probabilităţile $P\{\xi < 0\}$, $P\{\eta < 0\}$, $P\{\xi < 0|\eta < 0\}$.

Tema 5.9 *Funcţia de densitate de probabilitate a unei perechi de variabile aleatoare ce au mediile* -1 *şi respectiv* 2 *este*

$$f_{XY}(x, y) = \exp\left(-\frac{50\pi^2}{9}(x+1)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 - \frac{8\pi}{3}(x+1)(y-2)\right).$$

Este acesta o distribuţie normală ? Care sunt varianţele variabilelor aleatoare şi care este coeficientul de corelaţie ? Să se calculeze covariaţia perechii de variabile aleatoare şi să se decidă dacă acestea sunt corelate, respectiv independente.

Tema 5.10 *Se dă funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi a perechii de variabile aleatoare* ξ *şi* η *:*

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} k, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ şi } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se calculeze coeficientul k *şi să se reprezinte grafic. Să se calculeze probabilităţile* $P\{\xi > \eta\}$, $P\{\xi \leqslant 0.5 \text{ şi } \eta \leqslant 0.5\}$, $P\{\xi \leqslant 0.5\}$, $P\{\eta \leqslant 0.5|\xi \leqslant 0.5\}$. *Să se determine coeficientul de corelaţie şi funcţiile de densitate de probabilitate marginală a variabilelor aleatoare* ξ *şi* η.

Tema 5.11 *Un generator de numere binare generează o secvenţă perfect aleatoare de numere* X_i. *Pe baza acestora se construiesc variabilele aleatoare* $A_i = X_i + X_{i-1} + X_{i-2}$ *(suma algebrică a ultimelor trei numere binare generate) şi* $M_i = X_i \oplus X_{i-1} \oplus X_{i-2}$ *(suma modulo 2 a ultimelor trei numere binare generate). Se poate observa că acesta din urmă se mai poate scrie şi ca* $M_i = \begin{cases} A_i, \text{ dacă } A_i \leqslant 1, \\ A_{i-2}, \text{ dacă } A_i \geqslant 2. \end{cases}$ *. Să se calculeze funcţiile de densitate de probabilitate a variabilelor aleatoare* A *şi* M*, funcţiile de densitate de probabilitate de ordinul doi a perechilor de variabile aleatoare* (A, X) *şi* (X, M) *şi coeficienţii de corelaţie între variabilele aleatoare. Să se determine probabilităţile* $P\{X_i = 0|X_{i-1} = 0\}$, $P\{A_i = 0|A_{i-1} = 0\}$, $P\{A_i = 2|A_{i-1} = 0\}$.

Tema 5.12 *Se dă funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi a perechii de variabile aleatoare* ξ *şi* η *:*

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} k, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ şi } x \leqslant y \leqslant x + 2, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se calculeze coeficientul k *şi să se reprezinte grafic. Să se calculeze probabilităţile* $P\{\xi \geqslant \eta\}$, $P\{\xi \geqslant 2\eta\}$. *Să se determine valoarea* α *astfel ca* $P\{\xi > \alpha\eta\} = P\{\xi < \alpha\eta\}$. *Să se determine coeficientul de corelaţie şi funcţiile de densitate de probabilitate marginală a variabilelor aleatoare* ξ *şi* η.

Tema 5.13 *Se dă funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi a perechii de variabile aleatoare* ξ *şi* η *:*

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} k\left(1 - \frac{x}{4}\right), \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ şi } 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se calculeze coeficientul k *şi să se reprezinte grafic. Să se determine coeficientul de corelaţie şi funcţiile de densitate de probabilitate marginală a variabilelor aleatoare* ξ *şi* η. *Valorile continue ale variabilelor aleatoare* ξ *şi* η *se cuantizează, rezultând variabilele aleatoare* U *şi* V.

$$U = \begin{cases} 3, \text{ dacă } \xi \geqslant 3, \\ 2, \text{ dacă } 2 \leqslant \xi < 3, \\ 1, \text{ dacă } 1 \leqslant \xi < 2, \\ 0, \text{ dacă } \xi < 1. \end{cases} \quad \text{şi } V = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 0 \leqslant \eta \leqslant 2 \text{ şi } \xi < 2, \\ 0, \text{ dacă } 0 \leqslant \eta \leqslant 1 \text{ şi } 2 \leqslant \xi \leqslant 4, \\ 2, \text{ dacă } 1 \leqslant \eta \leqslant 2 \text{ şi } 2 \leqslant \xi \leqslant 4. \end{cases}$$

Să se calculeze funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi a perechii de variabile aleatoare discrete U *şi* V. *Să se determine coeficientul de corelaţie şi funcţiile de densitate de probabilitate marginală a variabilelor aleatoare* U *şi* V. *Să se determine mediile şi varianţele pentru variabilele aleatoare* U *şi* V.

Tema 5.14 *Două persoane, Dl. A şi Dl. B doresc să se întâlnească în locul L între orele 12 şi 13; înţelegerea dintre ei este ca cel care ajunge primul să aştepte 15 minute. Care este probabilitatea ca A şi B să se întâlnească dacă B ajunge la 12.30 ? Care este probabilitatea globală de întâlnire dintre A şi B ? La ce oră trebuie să vină A dacă nu vrea să se întâlnească cu B, dar totuşi vrea să respecte înţelegerea făcută ?*

Tema 5.15 *Două variabile aleatoare discrete* ξ *şi* η *au densitatea de probabilitate de ordinul doi* $f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{7}{16}\delta(x, y-1) + \frac{5}{16}\delta(x-1, y-1) + \frac{3}{32}\delta(x-2, y) + \frac{3}{32}\delta(x-2, y-2) + \frac{1}{32}\delta(x-3, y) + k\delta(x-3, y-2)$. *Să se determine constanta k şi funcţiile de densitate de probabilitate marginală* $f_\xi(x)$ *şi* $f_\eta(y)$*; să se calculeze mediile şi varianţele celor două variabile aleatoare; să se calculeze funcţia de corelaţie şi coeficientul de corelaţie dintre variabilele aleatoare. Sunt acestea corelate ? Dar independente ?*

Tema 5.16 *Variabilele aleatoare* ξ *şi* η *sunt independente şi distribuite uniform în intervalele* $[a;b]$ *respectiv* $[c;d]$*. Să se determine funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare* $\gamma = \xi + \eta$*. (Indicaţie: se foloseşte (5.15)).*

Tema 5.17 *Variabilele aleatoare* ξ *şi* η *sunt independente şi distribuite uniform în intervalele* $[a;b]$ *respectiv* $[c;d]$*. Să se determine funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare* $\gamma = \xi - \eta$*.*

Tema 5.18 *Fie variabilele aleatoare* ξ*,* γ *şi* η*; să se arate că:*

- covariaţie$(a\xi, b\eta) = ab\cdot$covariaţie(ξ, η)
- covariaţie$(\xi + \eta, \gamma) =$covariaţie$(\xi, \gamma)+$covariaţie(η, γ)
- covariaţie$(\eta, \xi) =$covariaţie(ξ, η)
- covariaţie$(\xi + \eta, \eta + \xi) =$covariaţie$(\xi, \xi)+$covariaţie$(\eta, \eta) + 2$covariaţie$(\xi, \eta)$

Tema 5.19 *Variabilele aleatoare* ξ *şi* η *sunt independente şi au aceeaşi varianţă* $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma^2$*. Să se calculeze varianţa produsului celor două variabile aleatoare (să se particularizeze pentru cazul în care cel puţin una dintre variabilele aleatoare* ξ *şi* η *are medie nulă).*

Tema 5.20 *Pentru variabilele aleatoare independente* ξ *şi* η *să se arate că:*

$$M_{\xi\eta}^{(2)} = M_\xi^{(2)} M_\eta^{(2)} + \left(m_\eta^{(1)}\right)^2 M_\xi^{(2)} + \left(m_\xi^{(1)}\right)^2 M_\eta^{(2)}.$$

Capitolul 6

Procese aleatoare

Un proces aleator este o funcţie ce asociază un număr real realizării unui eveniment la un moment de timp dat; dacă Ω este mulţimea evenimentelor elementare, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ atunci avem:

$$\xi : \Omega \times R \longrightarrow R,\ \xi(\omega_i, t_j) = x. \tag{6.1}$$

Pentru un eveniment fixat ω_i, $\xi^{(i)}(t) = \xi(t)$ este o realizare particulară a procesului aleator.

6.1 Funcţia de repartiţie şi funcţia de densitate de probabilitate

Funcţia de repartiţie a procesului aleator este definită ca o extensie a funcţiei de repartiţie a unei variabile aleatoare ce are o desfăşurare în timp; atunci valoarea acesteia într-un punct va fi probabilitatea ca valoarea unei realizări particulare a procesului aleator la un moment de timp dat să fie mai mică sau egală cu valoarea punctului specificat:

$$F_\xi(x,t) = P\{\xi^{(i)}(t) \leqslant x\}. \tag{6.2}$$

Funcţia de repartiţie de ordinul n va fi:

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n) = P\{\xi^{(i)}(t_1) \leqslant x_1, \xi^{(i)}(t_2) \leqslant x_2, ..., \xi^{(i)}(t_n) \leqslant x_n\}. \tag{6.3}$$

Funcţia de densitate de probabilitate este derivata funcţiei de repartiţie:

$$f_\xi(x,t) = \frac{dF_\xi(x,t)}{dx}. \tag{6.4}$$

Funcţia de densitate de probabilitate de ordinul n va fi:

$$f_\xi(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{\partial F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}. \tag{6.5}$$

După cum se remarcă, ambele funcţii de bază ce caracterizează statistica semnalului aleator pot să depindă de timp.

6.2 Momente statistice ale semnalelor aleatoare

Momentele statistice ale unui proces aleator sunt definite prin extensia temporală a momentelor (mediilor) statistice ale unei variabile aleatoare. Momentul statistic [necentrat] de ordinul k al procesului aleator ξ este:

$$m_\xi^{(k)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x,t)dx. \tag{6.6}$$

Dependenţa de timp a momentelor statistice este evidentă (funcţia de densitate de probabilitate a procesului aleator este o funcţie de timp şi variabila temporală se comportă ca o constantă faţă de variabila de integrare), dar nu întotdeauna notaţia momentului statistic include factorul timp. Cazurile de interes sunt tot media ($k = 1$) şi media pătratică ($k = 2$):

$$\overline{\xi(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x,t)dx,$$

$$\overline{\xi^2(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x,t)dx.$$

Momentele statistice centrate sunt definite analog:

$$M_\xi^{(k)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{\xi(t)}\right)^k f_\xi(x,t)dx. \tag{6.7}$$

6.3 Medii temporale ale semnalelor aleatoare

Mediile temporale ale unui semnal (proces) aleator nu pot fi definite decât pentru o realizare particulară a acestuia, deci pentru un $\xi(t) = \xi^{(i)}(t)$. În general, media de ordinul k este:

$$\widetilde{\xi(t)}^{(k)} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} (\xi(t))^k dt.$$

Cazurile uzuale de interes sunt mediile temporale de ordinul 1 (componenta continuă) şi de ordinul 2 (puterea medie):

$$\widetilde{\xi(t)} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \xi(t)dt,$$

$$\widetilde{\xi^2(t)} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \xi^2(t)dt.$$

6.4 Corelaţia proceselor aleatoare

Corelaţia (şi intercorelaţia) proceselor aleatoare este definită în mod analog cazului variabilelor aleatoare; şi aici diferenţa esenţială este determinată de introducerea dimensiunii temporale. În plus, vor fi două tipuri de funcţii de corelaţie, depinzând de medierea folosită: statistică sau temporală.

Funcţia de corelaţie statistică este:

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\eta(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi\eta}(x, y, t_1, t_2) dxdy, \tag{6.8}$$

care, pentru $\eta = \xi$, se transformă în autocorelaţie:

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \tag{6.9}$$

Funcţia de corelaţie temporală a proceselor aleatoare ξ şi η (calculată evident pentru realizări particulare ale proceselor) este:

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \widetilde{\xi(t)\eta(t-\tau)} = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t)\eta(t-\tau)dt. \tag{6.10}$$

6.5 Clase de semnale aleatoare

Semnalele aleatoare au fost clasificate după comportarea în timp a caracteristicilor statistice. Un semnal aleator ale cărui caracteristici statistice sunt invariante în raport cu schimbarea originii timpului (sau, echivalent, la orice translaţie în timp) se numeşte semnal aleator staţionar. Staţionaritatea este de două tipuri:

- staţionaritate în sens larg (staţionaritate slabă, staţionaritate până la ordinul doi): dacă funcţiile de repartiţie (6.2), (6.3) (şi respectiv de densitate de probabilitate (6.4), (6.5)) de ordinele unu şi doi sunt invariante la o translaţie în timp; acesta înseamnă că funcţiile de repartiţie şi densitate de probabilitate de ordinul unu nu depind de timp şi funcţiile de repartiţie şi densitate de probabilitate de ordinul doi depind doar de diferenţa de timp $\tau = t_2 - t_1$:

  $$F_{\xi}(x, t) = F_{\xi}(t);\ f_{\xi}(x, t) = f_{\xi}(x);$$

  $$F_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_{\xi}(x_1, x_2, \tau);\ f_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_{\xi}(x_1, x_2, \tau).$$

  Consecinţa este că momentele statistice până la ordinul doi (6.6) (medie, medie pătratică, varianţă) sunt constante, şi autocorelaţia (6.8) este o funcţie ce depinde doar de diferenţa de timp τ.

- staţionaritate în sens strict (staţionaritate tare): dacă funcţiile de repartiţie (6.3) (şi respectiv de densitate de probabilitate (6.5)) de orice ordin sunt invariante la o translaţie în timp:

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n) = F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, ..., t_n + \tau),$$

$$f_\xi(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n) = f_\xi(x_1, x_2, ..., x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, ..., t_n + \tau).$$

  Un semnal staţionar în sens strict este staţionar în sens larg; reciproca nu este adevărată.

Pentru un semnal aleator staţionar în sens larg, funcţia de autocorelaţie are câteva proprietăţi particulare speciale: este o funcţie pară:

$$B_\xi(\tau) = \overline{\xi(t)\xi(t-\tau)} = \overline{\xi(t-\tau)\xi(t)} = B_\xi(-\tau), \tag{6.11}$$

pentru care valoarea din origine este puterea semnalului aleator pe o sarcină egală cu unitatea:

$$B_\xi(0) = \overline{\xi(t)\xi(t)} = \overline{\xi^2(t)} = P_\xi, \tag{6.12}$$

pentru care limita asimptotică de la infinit este pătratul mediei procesului aleator:

$$B_\xi(\infty) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \overline{\xi(t)\xi(t-\tau)} = \overline{\xi(t)}\,\overline{\xi(t-\tau)} = \overline{\xi(t)}^2. \tag{6.13}$$

În plus, valoarea din origine a funcţiei de autocorelaţie este un maxim absolut:

$$B_\xi(0) \geqslant |B_\xi(\tau)|, \forall\tau. \tag{6.14}$$

Staţionaritatea este o proprietate ce nu se poate determina decât pe baza mulţimii de realizări particulare; în practică însă se dispune de câte o singură realizare particulară a semnalelor aleatore, şi deci se pune problema în ce măsură caracteristicile statistice determinate pe baza acesteia (deci medii temporale) sunt caracteristice pentru întregul proces aleator (deci ca medii statistice). Un semnal aleator staţionar pentru care mediile statistice sunt egale cu mediile temporale se numeşte ergodic.

6.6 Probleme rezolvate

Exemplul 6.1 *Fie semnalul condiţionat determinist $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, unde A şi ω sunt constante şi φ este o variabilă aleatoare distribuită uniform în $[0; \pi]$. Să se calculeze media, media pătratică, varianţa şi autocorelaţia statistică a semnalului; să se verifice staţionaritatea semnalului.*

Rezolvare: Funcţia de densitate de probabilitate a fazei semnalului este:

$$f_\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, \text{ dacă } z \in [0; \pi], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Media semnalului $x(t)$ este:

$$\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_\varphi(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(\omega t + z) f_\varphi(z) dz = \int_{0}^{\pi} \frac{A}{\pi} \sin(\omega t + z) dz =$$

$$= -\frac{A}{\pi} \cos(\omega t + z) \,|_0^\pi = -\frac{A}{\pi} (\cos(\omega t + \pi) - \cos(\omega t)) = \frac{2A}{\pi} \cos(\omega t).$$

La acelaşi rezultat se poate ajunge şi prin aplicarea medierii statistice:

$$\overline{x(t)} = \overline{A \sin(\omega t + \varphi)} = \overline{A \sin(\omega t) \cos\varphi + A \cos(\omega t) \sin\varphi} = \overline{A \sin(\omega t) \cos\varphi} +$$

$$+ \overline{A \cos(\omega t) \sin\varphi} = A \sin(\omega t) \overline{\cos\varphi} + A \cos(\omega t) \overline{\sin\varphi} = A \sin(\omega t) \cdot 0 + A \cos(\omega t) \cdot \frac{2}{\pi} =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \cos(\omega t).$$

Calculul medierii statistice a funcţiilor sinus şi cosinus de φ s-a făcut cu teorema mediei (4.5):

$$\overline{\sin\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin z f_\varphi(z) dz = \frac{2}{\pi}; \ \overline{\cos\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos z f_\varphi(z) dz = 0.$$

Media pătratică a semnalului x este:

$$\overline{x^2(t)} = \overline{A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)} = \overline{(A \sin(\omega t) \cos\varphi + A \cos(\omega t) \sin\varphi)^2} = A^2 \sin^2(\omega t) \overline{\cos^2\varphi} +$$

$$+ A^2 \cos^2(\omega t) \overline{\sin^2\varphi} + 2A^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \overline{\cos\varphi \sin\varphi} =$$

$$= A^2 \sin^2(\omega t) \cdot \frac{1}{2} + A^2 \cos^2(\omega t) \cdot \frac{1}{2} + A^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \cdot 0 = \frac{A^2}{2}.$$

Varianţa este:

$$\sigma^2 = \overline{x^2(t)} - \overline{x(t)}^2 = \frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2} \cos^2(\omega t).$$

Autocorelaţia statistică a semnalului $x(t)$ este:

$$B(t_1, t_2) = \overline{x(t_1) x(t_2)} = A^2 \overline{\sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\omega t_2 + \varphi)} = A^2 \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2) \overline{\cos^2\varphi} +$$

$$+ A^2 \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) \overline{\sin^2\varphi} + \frac{A^2}{2} (\sin(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \cos(\omega t_1) \sin(\omega t_2)) \overline{\sin 2\varphi} =$$

$$= \frac{A^2}{2} \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2) + \frac{A^2}{2} \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega (t_1 - t_2)) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega \tau).$$

Evident, semnalul nu este staţionar, pentru că media sa variază în timp.

■

Exemplul 6.2 *Fie procesul aleator $z(t) = x \cos\omega t + y \sin\omega t$, unde x şi y sunt variabile aleatoare normale de medie nulă, independente. Să se calculeze media şi varianţa procesului aleator $z(t)$, funcţia de autocorelaţie şi să se determine dacă procesul este sau nu staţionar.*

Rezolvare: Media procesului aleator este:

$$\overline{z(t)} = \overline{x\cos\omega t + y\sin\omega t} = \overline{x\cos\omega t} + \overline{y\sin\omega t} = \overline{x}\cos\omega t + \overline{y}\sin\omega t = 0.$$

Media pătratică a procesului aleator este:

$$\overline{z^2(t)} = \overline{(x\cos\omega t + y\sin\omega t)^2} = \overline{x^2\cos^2\omega t} + \overline{y^2\sin^2\omega t} + 2\overline{xy\cos\omega t\sin\omega t} = \overline{x^2}\cos^2\omega t +$$

$$+\overline{y^2}\sin^2\omega t + 2\overline{xy}\cos\omega t\sin\omega t = 2\overline{xy}\cos\omega t\sin\omega t = \sigma_x^2\cos^2\omega t + \sigma_y^2\sin^2\omega t.$$

Varianţa va fi atunci:

$$\sigma_z^2 = \overline{z^2(t)} - \overline{z(t)}^2 = \sigma_x^2\cos^2\omega t + \sigma_y^2\sin^2\omega t.$$

Funcţia de autocorelaţie statistică este:

$$B(t_1, t_2) = \overline{z(t_1)z(t_2)} = \overline{(x\cos\omega t_1 + y\sin\omega t_1)(x\cos\omega t_2 + y\sin\omega t_2)} = \overline{x^2}\cos\omega t_1\cos\omega t_2 +$$

$$+\overline{y^2}\sin\omega t_1\sin\omega t_2 + \overline{xy}\,(\cos\omega t_1\sin\omega t_2 + \sin\omega t_1\cos\omega t_2) =$$
$$= \sigma_x^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + \sigma_y^2\sin\omega t_1\sin\omega t_2.$$

Dacă $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, atunci:

$$\sigma_z^2 = \overline{z^2(t)} = \sigma^2 \text{ şi } B(t_1, t_2) = \sigma^2\cos\omega(t_1 - t_2) = \sigma^2\cos\omega\tau,$$

şi procesul aleator este staţionar în sens larg.

■

Exemplul 6.3 *Să se demonstreze că funcţia de autocorelaţie a unui proces aleator staţionar în sens larg este maximă absolut în origine (demonstrarea relaţiei (6.14)).*

Rezolvare: Trebuie demonstrat că $B_\xi(0) \geqslant |B_\xi(\tau)|$, $\forall\tau$. Dacă evaluăm:

$$\overline{(\xi(t) - \xi(t-\tau))^2} = \overline{\xi^2(t)} + \overline{\xi^2(t-\tau)} - 2\overline{\xi(t)\xi(t-\tau)} = 2B_\xi(0) - 2B_\xi(\tau) \geqslant 0,$$

deci: $B_\xi(0) \geqslant B_\xi(\tau)$ (deoarece procesul este staţionar şi media nu depinde de momentul de timp).

Dacă evaluăm:

$$\overline{(\xi(t) + \xi(t-\tau))^2} = \overline{\xi^2(t)} + \overline{\xi^2(t-\tau)} + 2\overline{\xi(t)\xi(t-\tau)} = 2B_\xi(0) + 2B_\xi(\tau) \geqslant 0,$$

deci: $B_\xi(0) \geqslant -B_\xi(\tau)$.

■

Exemplul 6.4 *Fie procesul aleator $\gamma(t) = \xi(t) + \eta(t)$, unde ξ şi η sunt procese aleatoare staţionare şi independente. Să se calculeze funcţia de autocorelaţie a procesului γ în funcţie de funcţiile de autocorelaţie a celor două procese aleatoare, ştiind că cel puţin unul dintre procesele ξ şi η are media nulă.*

Rezolvare: Funcţia de autocorelaţie căutată este:

$$B_\gamma(\tau) = \overline{\gamma(t)\gamma(t-\tau)} = \overline{(\xi(t)+\eta(t))\,(\xi(t-\tau)+\eta(t-\tau))} =$$

$$= \overline{\xi(t)\xi(t-\tau)} + \overline{\eta(t)\eta(t-\tau)} + \overline{\xi(t)\eta(t-\tau)} + \overline{\xi(t-\tau)\eta(t)} = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau).$$

Deoarece procesele ξ şi η sunt procese aleatoare independente, $\overline{\xi(t)\eta(t-\tau)} = \overline{\xi(t)} \cdot \overline{\eta(t-\tau)}$ şi $\overline{\xi(t-\tau)\eta(t)} = \overline{\xi(t-\tau)} \cdot \overline{\eta(t)}$. Deoarece procesele ξ şi η sunt procese aleatoare staţionare, $\overline{\xi(t)} = \overline{\xi(t-\tau)}$ şi $\overline{\eta(t)} = \overline{\eta(t-\tau)}$. Atunci:

$$B_\gamma(\tau) = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau) + 2\overline{\xi(t)\eta(t)} = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau),$$

(pentru că măcar unul dintre procesele aleatoare este de medie nulă).

Pentru a deduce o relaţie generală (care să fie valabilă şi pentru medii nenule) trebuie să ţinem seama că, din (6.13), avem $B_\xi(\infty) = \overline{\xi(t)}^2$; şi atunci:

$$B_\gamma(\tau) = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau) + 2\sqrt{B_\xi(\infty)B_\eta(\infty)}.$$

■

Exemplul 6.5 *Un semnal aleator discret $\eta(n)$ este obţinut din semnalul aleator staţionar $\xi(n)$ de medie nulă prin $\eta(n) = \frac{1}{2}\xi(n) + \frac{1}{4}\xi(n-1) + \frac{1}{4}\xi(n-2)$. Să se determine funcţiile de autocorelaţie a semnalului $\eta(n)$ şi de corelaţie între semnalele $\eta(n)$ şi $\xi(n)$.*

Rezolvare: Corelaţia statistică dintre cele două procese aleatoare se poate calcula după formula de definiţie (6.8) transpusă pentru momente de timp discret, ca:

$$B_{\eta\xi}(k) = \overline{\eta(n)\xi(n-k)} = \overline{\left(\frac{1}{2}\xi(n) + \frac{1}{4}\xi(n-1) + \frac{1}{4}\xi(n-2)\right)\xi(n-k)} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{\xi(n)\xi(n-k)} + \frac{1}{4}\overline{\xi(n-1)\xi(n-k)} + \frac{1}{4}\overline{\xi(n-2)\xi(n-k)} =$$

$$= \frac{1}{2}B_\xi(k) + \frac{1}{4}B_\xi(k-1) + \frac{1}{4}B_\xi(k-2).$$

Pentru cazul în care procesul aleator $\xi(n)$ este un zgomot alb, $B_\xi(k) = \delta(k)$, şi atunci intercorelaţia calculată devine:

$$B_{\eta\xi}(k) = \frac{1}{2}\delta(k) + \frac{1}{4}\delta(k-1) + \frac{1}{4}\delta(k-2).$$

Autocorelaţia statistică a semnalului aleator $\eta(t)$ este determinata conform (6.9), deci:

$$B_\eta(k) = \overline{\eta(k)\eta(n-k)} =$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{2}\xi(n) + \frac{1}{4}\xi(n-1) + \frac{1}{4}\xi(n-2)\right)\left(\frac{1}{2}\xi(n-k) + \frac{1}{4}\xi(n-k-1) + \frac{1}{4}\xi(n-k-2)\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\overline{\xi(n)\xi(n-k)} + \frac{1}{8}\overline{\xi(n)\xi(n-k-1)} + \frac{1}{8}\overline{\xi(n)\xi(n-k-2)} + \frac{1}{8}\overline{\xi(n-1)\xi(n-k)} +$$

$$+\frac{1}{16}\overline{\xi(n-1)\xi(n-k-1)}+\frac{1}{16}\overline{\xi(n-1)\xi(n-k-2)}+\frac{1}{8}\overline{\xi(n-2)\xi(n-k)}+$$
$$+\frac{1}{16}\overline{\xi(n-2)\xi(n-k-1)}+\frac{1}{16}\overline{\xi(n-2)\xi(n-k-2)}=$$
$$=\frac{1}{4}B_\xi(k)+\frac{1}{8}B_\xi(k+1)+\frac{1}{8}B_\xi(k+2)+\frac{1}{8}B_\xi(k-1)+\frac{1}{16}B_\xi(k)+\frac{1}{16}B_\xi(k+1)+$$
$$+\frac{1}{8}B_\xi(k-2)+\frac{1}{16}B_\xi(k-1)+\frac{1}{16}B_\xi(k)=$$
$$=\frac{1}{8}B_\xi(k-2)+\frac{3}{16}B_\xi(k-1)+\frac{3}{8}B_\xi(k)+\frac{3}{16}B_\xi(k+1)+\frac{1}{8}B_\xi(k+2).$$

Pentru cazul în care procesul aleator $\xi(n)$ este un zgomot alb, $B_\xi(k)=\delta(k)$, şi atunci autocorelaţia calculată devine

$$B_\eta(k)=\frac{1}{8}\delta(k-2)+\frac{3}{16}\delta(k-1)+\frac{3}{8}\delta(k)+\frac{3}{16}\delta(k+1)+\frac{1}{8}\delta(k+2).$$

■

6.7 Probleme propuse

Tema 6.1 *Fie semnalul condiţionat determinist* $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$, *unde* φ *şi* ω *sunt constante şi* A *este o variabilă aleatoare distribuită uniform în* $[-M;M]$. *Să se calculeze media, media pătratică, varianţa şi autocorelaţia statistică a semnalului; să se indice staţionaritatea semnalului.*

Tema 6.2 *Fie semnalul condiţionat determinist* $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$, *unde* A *şi* φ *sunt constante şi* ω *este o variabilă aleatoare distribuită uniform în* $[\omega_1;\omega_2]$. *Să se calculeze media, media pătratică, varianţa şi autocorelaţia statistică a semnalului; să se indice staţionaritatea semnalului.*

Tema 6.3 *Fie semnalul condiţionat determinist* $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$, *unde* A *şi* ω *sunt constante şi* φ *este o variabilă aleatoare distribuită uniform în* $[0;2\pi]$. *Să se calculeze media, media pătratică, varianţa şi autocorelaţia statistică a semnalului; să se indice staţionaritatea semnalului. Să se reia problema pentru cazul în care* φ *este o variabilă aleatoare distribuită uniform în* $[0;\pi/2]$.

Tema 6.4 $\xi(n)$ *este un semnal pur aleator de timp discret, de medie zero şi varianţă* σ_ξ^2. *Pe baza acestui semnal aleator se construiesc semnalele aleatoare* $\eta(n)=0.5\cdot\xi(n)+0.5\cdot\xi(n-1)$ *şi* $\gamma(n)=\xi(n)-\xi(n-1)$. *Pentru aceste noi semnale aleatoare să se calculeze momentele statistice de centrate şi necentrate de ordinele 1 şi 2 şi funcţiile de autocorelaţie şi intercorelaţie.*

Tema 6.5 $\xi(n)$ *este un semnal pur aleator de timp discret, ale cărui eşantioane sunt distribuite uniform în intervalul* $[-1;1]$. *Pe baza acestui semnal aleator se construieşte semnalul* $\eta(n)=\xi(n)+2\cdot\xi(n-1)+\xi(n-2)$. *Pentru acest nou semnal aleator să se calculeze momentele statistice centrate şi necentrate de ordinele 1 şi 2 şi funcţia de autocorelaţie.*

Tema 6.6 *Se consideră un proces aleator ergodic* $\xi(t)$*, distribuit normal şi având funcţia de autocorelaţie* $R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} + B$*, unde* A*,* B *şi* α *sunt constante. Să se determine media, varianţa, media pătratică, puterea medie şi funcţia de densitate de probabilitate a semnalului.*

Tema 6.7 *Funcţia de autocorelaţie a unui proces aleator ergodic este*

$$B_x(\tau) = k_1 \operatorname{Si}(\pi f_1 \tau) + k_2 \cos(2\pi f_2 \tau) + k_3.$$

Are procesul aleator $x(t)$ *componentele periodice şi ce perioadă au acestea ? Care este puterea medie, componenta continuă şi varianţa procesului ?*

Tema 6.8 *Pentru semnalul periodic de perioadă* $T = 2$*, determinat de:*

$$x(t) = \begin{cases} U, \text{ dacă } t \in [0; 1], \\ 0, \text{ dacă } t \in [1; 2]. \end{cases}$$

Să se calculeze funcţia de autocorelaţie, componenta continuă şi puterea medie.

Tema 6.9 *Semnalul periodic de perioadă* $T = 7$ *este definit de*

$$x(t) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } t \in [0; 2], \\ -2, \text{ dacă } t \in [6; 7], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se determine puterea medie, componenta continuă şi dispersia semnalului folosind funcţia de autocorelaţie temporală.

Tema 6.10 *Care sunt proprietăţile unui semnal ce pot fi extrase din funcţia sa de autocorelaţie: perioada, varianţa, componenta continuă, proprietăţile de simetrie, puterea medie, faza, densitatea spectrală de putere. Cum se poate proceda?*

Tema 6.11 *Procesele aleatoare* $x(t)$ *şi* $y(t)$ *au funcţiile de autocorelaţie statistică* $B_x(\tau) = \begin{cases} 25 - 16\,|\tau|\,, \text{ dacă } |\tau| \leqslant 1, \\ 9, \text{ în rest.} \end{cases}$ *şi* $B_y(\tau) = \exp(-\frac{\tau^2}{50})$*. Să se calculeze puterea medie, varianţele şi mediile proceselor aleatoare. Să se schiţeze calitativ densităţile spectrale de putere a celor două procese aleatoare, şi pe baza schiţelor să se arate care spectru de putere este mai lat şi care spectru de putere are componente de frecvenţă mai ridicată.*

Tema 6.12 *Un semnal aleator binar este format din impulsuri de amplitudine* U *sau* 0*; impulsurile încep la momente de timp* kT_0 *şi au o lăţime variabilă (dar mai mică decât* T_0*),* b*. Lăţimea* b *a impulsurilor de amplitudine* U *este o variabilă aleatoare distribuită uniform în intervalul* $[0; \frac{T_0}{2}]$*, independentă de* $r(t)$*. Probabilitatea de apariţie a impulsurilor de amplitudine nulă este* $p_0 = 0.4$ *şi acest caz poate fi asimilată cu un impuls de lăţime* 0*. Să se determine lăţimea medie a unui impuls şi funcţiile de repartiţie şi de densitate de probabilitate ale variabilei aleatoare* b*. Să se calculeze funcţia de densitate de probabilitate a semnalului aleator* $r(t)$ *şi funcţia de autocorelaţie a acestuia.*

Capitolul 7

Teorema Wiener-Hincin

Densitatea spectrală de putere a unui proces (semnal) aleator $\xi(t)$ este definită ca:

$$q_\xi(\omega) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{\overline{\left|\text{Fourier}\left(\xi_T(t)\right)\right|^2}}{T}, \tag{7.1}$$

unde $\xi_T(t)$ este restricţia semnalului aleator $\xi(t)$ la intervalul $[-T;T]$.

Teorema Wiener-Hincin afirmă că pentru un proces aleator $\xi(t)$, staţionar în sens larg, funcţia de autocorelaţie şi densitatea spectrală de putere sunt perechi Fourier:

$$q_\xi(\omega) = \text{Fourier}\left\{B_\xi(\tau)\right\} \text{ şi } B_\xi(\tau) = \text{Fourier}^{-1}\left\{q_\xi(\omega)\right\},$$

$$q_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau;\ B_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_\xi(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \tag{7.2}$$

7.1 Probleme rezolvate

Exemplul 7.1 *Fie un semnal aleator ergodic, a cărui densitate spectrală de putere este:*

$$q(\omega) = \begin{cases} A + C\delta(\omega),\ \textit{pentru}\ |\omega| \leqslant \omega_0, \\ 0,\ \textit{în rest.} \end{cases}$$

Să se calculeze funcţia de autocorelaţie a procesului aleator, valorile sale medii, şi să se determine componenţa acestuia.

Rezolvare: Teorema Wiener-Hincin (7.2) leagă densitatea spectrală de putere de funcţia de autocorelaţie prin:

$$B(\tau) = R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\omega_0}^{\omega_0} Ae^{j\omega\tau}d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} C\delta(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\right) =$$

$$= \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega + \frac{A}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{C}{2\pi} + \frac{A}{2\pi}\frac{1}{j\tau}\left(e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega_0\tau}\right) =$$

$$= \frac{C}{2\pi} + \frac{A}{\pi\tau}\sin\omega_0\tau = \frac{C}{2\pi} + \frac{\omega_0 A}{\pi}\,\mathrm{Si}\,\omega_0\tau.$$

Din proprietăţile funcţiei de autocorelaţie avem că:

$$\overline{\xi(t)} = \sqrt{B(\infty)} = \sqrt{\frac{C}{2\pi}},\ \overline{\xi^2(t)} = B(0) = \frac{C}{2\pi} + \frac{\omega_0 A}{\pi},\ \sigma_\xi^2 = \frac{\omega_0 A}{\pi}.$$

Din gama de frecvenţe ocupate de densitatea spectrală de putere se poate deduce faptul că procesul aleator este un proces de zgomot de bandă limitată (ω_0) suprapus peste un semnal constant $\frac{C}{2\pi}$. Variind valorile lui ω_0 între 0 şi ∞, cazurile extreme sunt: semnal constant $\xi(t) = \frac{C}{2\pi}$ pentru $\omega_0 \longrightarrow 0$ şi un zgomot alb suprapus peste un semnal constant pentru $\omega_0 \longrightarrow \infty$.

■

Exemplul 7.2 *Fie procesul aleator $\gamma(t) = \xi(t) + \eta(t)$, unde ξ şi η sunt procese aleatoare staţionare şi independente. Să se calculeze densitatea spectrală de putere a procesului γ în funcţie de densităţile spectrale de putere a celor două procese aleatoare, ştiind că cel puţin unul dintre procesele ξ şi η are media nulă.*

Rezolvare: Densitatea spectrală de putere căutată este:

$$q_\gamma(\omega) = \text{Fourier}\left\{B_\gamma(\tau)\right\}.$$

$$B_\gamma(\tau) = \overline{\gamma(t)\gamma(t-\tau)} = \overline{(\xi(t)+\eta(t))\left(\xi(t-\tau)+\eta(t-\tau)\right)} =$$

$$= \overline{\xi(t)\xi(t-\tau)} + \overline{\eta(t)\eta(t-\tau)} + \overline{\xi(t)\eta(t-\tau)} + \overline{\xi(t-\tau)\eta(t)} = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau).$$

Deoarece procesele ξ şi η sunt procese aleatoare independente, $\overline{\xi(t)\eta(t-\tau)} = \overline{\xi(t)} \cdot \overline{\eta(t-\tau)}$ şi $\overline{\xi(t-\tau)\eta(t)} = \overline{\xi(t-\tau)} \cdot \overline{\eta(t)}$. Deoarece procesele ξ şi η sunt procese aleatoare staţionare, $\overline{\xi(t)} = \overline{\xi(t-\tau)}$ şi $\overline{\eta(t)} = \overline{\eta(t-\tau)}$. Atunci:

$$B_\gamma(\tau) = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau) + 2\overline{\xi(t)\eta(t)} = B_\xi(\tau) + B_\eta(\tau) + 2\sqrt{B_\xi(\infty)B_\eta(\infty)}.$$

Atunci transformata Fourier a funcţiei de autocorelaţie este (ţinând cont că Fourier$\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$):

$$q_\gamma(\omega) = \text{Fourier}\left\{B_\xi(\tau)\right\} = \text{Fourier}\left\{B_\xi(\tau)\right\} + \text{Fourier}\left\{B_\eta(\tau)\right\} +$$

$$+ \text{Fourier}\left\{2\sqrt{B_\xi(\infty)B_\eta(\infty)}\right\} = q_\xi(\omega) + q_\eta(\omega) + 4\pi\sqrt{B_\xi(\infty)B_\eta(\infty)}\delta(\omega).$$

Pentru că măcar unul dintre procesele aleatoare este de medie nulă, $B_\xi(\infty)B_\eta(\infty) = 0$ şi atunci:

$$q_\gamma(\omega) = q_\xi(\omega) + q_\eta(\omega).$$

■

Exemplul 7.3 *Procesul aleator de timp discret $x(n)$ este obţinut ca o medie mobilă din procesul aleator de zgomot $\xi(n)$ prin $x(n) = \frac{1}{2}\left(\xi(n) + \xi(n-1)\right)$. Să se determine densitatea spectrală de putere a procesului aleator $x(n)$, folosind teorema Wiener-Hincin.*

Rezolvare: Mai întâi trebuie determinată funcţia de autocorelaţie a procesului aleator $x(n)$:

$$B_x(k) = \overline{x(n)x(n-k)} = \frac{1}{4}\overline{(\xi(n) + \xi(n-1))\,(\xi(n-k) + \xi(n-1-k))} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overline{\xi(n)\xi(n-k)} + \overline{\xi(n)\xi(n-1-k)} + \overline{\xi(n-1)\xi(n-k)} + \overline{\xi(n-1)\xi(n-k-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(B_\xi(k) + B_\xi(k+1) + B_\xi(k-1) + B_\xi(k)\right) = \frac{1}{2}B_\xi(k) + \frac{1}{4}B_\xi(k-1) + \frac{1}{4}B_\xi(k+1).$$

Cum procesul aleator $\xi(n)$ este un zgomot, funcţia sa de autocorelaţie este un impuls Dirac, $B_\xi(k) = \delta(k)$. Atunci

$$B_x(k) = \frac{1}{2}\delta(k) + \frac{1}{4}\delta(k-1) + \frac{1}{4}\delta(k+1).$$

Pentru determinarea densităţii spectrale de putere, teorema Wiener Hincin va trebui aplicată sub forma discretă:

$$q_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_x(k)e^{-jk\omega},$$

$$q_x(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{j\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega.$$

■

7.2 Probleme propuse

Tema 7.1 *Fie $\xi(t)$ un semnal aleator ergodic a cărui densitate spectrală de putere este $q_\xi(\omega) = \frac{N_0}{2}, \forall\omega$ şi fie semnalul determinist $s(t) = \delta(t)$. Să se calculeze funcţiile de autocorelaţie a celor două semnale şi să se interpreteze.*

Tema 7.2 *Funcţia de autocorelaţie a unui proces aleator ergodic este dată de:*

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \frac{T_0 - |\tau|}{T_0}, \text{ dacă } |\tau| \leqslant T_0, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se reprezinte funcţia de autocorelaţie şi să se verifice grafic proprietăţile acesteia; să se determine componenta continuă, puterea medie şi varianţa procesului aleator. Să se calculeze densitatea spectrală de putere a procesului aleator şi să se comenteze influenţa parametrului T_0 asupra lăţimii funcţiei de autocorelaţie şi asupra lărgimii de bandă a densităţii spectrale de putere.

Tema 7.3 *Semnalele aleatoare $\xi(t)$ şi $\eta(t)$ au funcţiile de autocorelaţie $R_\xi(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} + C\cos\omega_0\tau$ şi $R_\eta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} + B + C\cos\omega_0\tau$. Să se calculeze funcţiile de densitate spectrală de putere asociată, să se reprezinte grafic şi prin simpla inspecţie a funcţiilor să se determine componenţa semnalelor $\xi(t)$ şi $\eta(t)$, precum şi mediile statistice de ordinele 1 şi 2.*

Tema 7.4 *Semnalul aleator $\xi(t)$ are funcţia de autocorelaţie $R_\xi(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} + B$. Să se calculeze funcţiile de densitate spectrală de putere asociată, să se reprezinte grafic şi prin simpla inspecţie a funcţiilor să se determine mediile statistice de ordinele 1 şi 2 şi puterea medie a semnalului.*

Tema 7.5 *Densitatea spectrală de putere a unui semnal aleator este dată de funcţia $q(\omega) = (\omega^4 + 10\omega^2 + 9)^{-1}$. Să se determine media pătratică a semnalului aleator.*

Tema 7.6 *Un proces aleator este determinat de $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \Phi)$, unde A şi f_0 sunt constante iar Φ este distribuită uniform în intervalul $[0; 2\pi]$. Să se calculeze densitatea spectrală de putere a procesului aleator.*

Tema 7.7 *Calculaţi autocorelaţia proceselor aleatoare pentru care funcţiile de densitate spectrală de putere sunt date de $q_\xi(\omega) = (1+\omega^4)^{-1}$ şi $q_\eta(\omega) = (1+\omega^2)^{-2}$.*

Tema 7.8 *Procesul aleator $y(t)$ este construit din procesul aleator $x(t)$ ca $y(t) = x(t+a) - x(t-a)$. Să se calculeze funcţia de densitate spectrală de putere a procesului aleator $y(t)$. (Soluţie: $q_y(\omega) = 4q_x(\omega)\sin^2 a\omega$)*

Tema 7.9 *Să se arate că funcţia de autocorelaţie a unui proces aleator staţionar verifică relaţia:*

$$R(0) - R(\tau) \geqslant \frac{1}{4^n}\left(R(0) - R(2^n\tau)\right).$$

(Indicaţie: folosiţi inegalitatea trigonomerică $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \geqslant 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2\theta\right)$).

Tema 7.10 *Procesul aleator $x(t)$ este de medie nulă şi funcţie de autocorelaţie $R_x(\tau) = Ie^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$. Procesul aleator $y(t)$ este construit ca $y(t) = x^2(t)$. Care este densitatea spectrală de putere a celor două procese aleatoare ? Ce se intâmplă cu $q_y(\omega)$ dacă $q_x(\omega)$ este de tipul trece jos (respectiv trece sus) ideal ?*

Capitolul 8

Trecerea semnalelor aleatoare prin sisteme liniare

În cazul trecerii semnalelor aleatoare prin sisteme liniare, principala relaţie de interes (suplimentară faţă de legătura de tip convoluţie între semnalul de ieşire şi semnalul de intrare (8.1) şi derivată din aceasta) este cea care exprimă densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieşirea sistemului faţă de densitatea spectrală de putere a semnalului de la intrarea sistemului (8.2):

$$\eta(t) = \xi(t) * h(t), \tag{8.1}$$

$$q_\eta(\omega) = q_\xi(\omega) \left| H(\omega) \right|^2. \tag{8.2}$$

O clasă particulară de sisteme liniare sunt filtrele adaptate la forma semnalului. Un filtru adaptat la forma semnalului (sau, pe scurt, la semnalul) $s(t)$ are o funcţie pondere definită ca:

$$h(t) = ks\left(-(t-\tau_0)\right). \tag{8.3}$$

Proprietatea remarcabilă a filtrului adaptat (8.3) este aceea că răspunsul său la un semnal oarecare aplicat la intrare este o variantă scalată şi decalată în timp a funcţiei de corelaţie a semnalului de intrare şi a semnalului la care filtrul a fost adaptat:

$$y(t) = \xi(t) * h(t) = kR_{xs}(t-\tau_0). \tag{8.4}$$

8.1 Probleme rezolvate

Exemplul 8.1 *La intrarea unui filtru trece jos ideal cu frecvenţa de tăiere $f_T = 1$ kHz se aplică semnalul aleator $\xi(t) = \sin(2\pi 10^4 t + \varphi) + n(t)$, unde $n(t)$ este un zgomot alb şi φ este o variabilă aleatoare repartizată uniform în intervalul $[0; 2\pi]$. Să se calculeze funcţia de autocorelaţie statistică a semnalului $\xi(t)$ şi densitatea spectrală de putere a acestuia. Dacă $\eta(t)$ este semnalul de la ieşirea filtrului, să se calculeze funcţia sa de autocorelaţie şi densitatea spectrală de putere.*

Rezolvare: Definiţia zgomotului alb precizează că acesta este necorelat cu semnalul pe care îl afectează. Funcţia de autocorelaţie statistică pentru semnalul $\xi(t)$ este:

$$B_\xi(t_1,t_2) = \overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \overline{(\sin(2\pi 10^4 t_1+\varphi)+n(t_1))\,(\sin(2\pi 10^4 t_2+\varphi)+n(t_2))} =$$
$$= \overline{\sin(2\pi 10^4 t_1+\varphi)\sin(2\pi 10^4 t_2+\varphi)} + \overline{n(t_1)n(t_2)} + \overline{\sin(2\pi 10^4 t_1+\varphi)n(t_2)}+$$
$$+\overline{\sin(2\pi 10^4 t_2+\varphi)n(t_1)} = \overline{\frac{1}{2}\left(\cos(2\pi 10^4(t_2-t_1)) - \cos(2\pi 10^4(t_2+t_1)+2\varphi)\right)}+$$
$$+B_n(t_2-t_1) = \frac{1}{2}\cos(2\pi 10^4\tau) + B_n(\tau) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\cos(2\pi 10^4(t_2+t_1)+2x) f_\varphi(x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi 10^4\tau) + \delta(\tau) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\cos(2\pi 10^4(t_2+t_1)+2x)\frac{1}{2\pi}dx = \frac{1}{2}\cos(2\pi 10^4\tau)+\delta(\tau).$$

Semnalul $\xi(t)$ este staţionar în sens larg, şi se poate aplica deci teorema Wiener-Hincin (7.2) pentru a calcula funcţia de densitate spectrală de putere din funcţia de autocorelaţie:

$$q_\xi(\omega) = \text{Fourier}\{B_\xi(\tau)\} = \frac{1}{2}\text{Fourier}\{\cos(2\pi 10^4\tau)\} + \text{Fourier}\{\delta(\tau)\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\delta(\omega+2\pi 10^4) + \delta(\omega-2\pi 10^4)\right) + 1.$$

Funcţia de transfer a filtrului trece jos ideal este dată de:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } |\omega| \leqslant 2\pi f_T = 2\pi 10^3, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Funcţia de densitate spectrală de putere a semnalului de la ieşirea filtrului este determinată conform (8.2):

$$q_\eta(\omega) = q_\xi(\omega)\,|H(\omega)|^2.$$

Efectuând înmulţirea, se obţine:

$$q_\eta(\omega) = |H(\omega)|^2 = \begin{cases} 1, \text{ dacă } |\omega| \leqslant 2\pi f_T = 2\pi 10^3, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

(adică un semnal de bandă limitată, cu densitate spectrală de putere constantă, deci un zgomot de bandă limitată).

Funcţia de autocorelaţie a semnalului de ieşire este, conform (7.2), transformata Fourier inversă a funcţiei de densitate spectrală de putere:

$$B_\eta(\tau) = \text{Fourier}^{-1}\{q_\eta(\omega)\} = \frac{1}{\pi}\,\text{Si}(2\pi 10^3\tau).$$

■

Exemplul 8.2 *Se dă un filtru adaptat la semnalul* $s(t) = \begin{cases} A, \text{ dacă } |t| \leqslant \frac{T}{2}, \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$ *Să se determine răspunsul filtrului la semnalele de intrare* $s(t)$ *şi* $\xi(t)$ *(unde* $\xi(t)$ *este un semnal aleator de tip zgomot alb).*

Rezolvare: Conform definiţiei filtrului adaptat (8.3), funcţia sa pondere este dată de:

$$h(t) = ks\left(-(t-\tau_0)\right).$$

Atunci funcţia pondere în cazul particular studiat este:

$$h(t) = \begin{cases} kA, \text{ dacă } t \in [-\frac{T}{2}+\tau_0; \frac{T}{2}+\tau_0], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Pentru ca filtrul să fie cauzal este necesar ca $-\frac{T}{2}+\tau_0 \geqslant 0$, deci $\tau_0 \geqslant \frac{T}{2}$.

Semnalul de la ieşirea filtrului adaptat este produsul de convoluţie a intrării cu funcţia pondere. Dacă la intrare să aplicat semnalul $s(t)$, la ieşire vom avea:

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t-\tau)d\tau = k\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_0-\tau)s(t-\tau)d\tau =$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_0-t+u)s(u)du = k\int_{-\infty}^{\infty} s\left(u-(t-\tau_0)\right)s(u)du = kR_s(-(t-\tau_0)) = kR_s(t-\tau_0).$$

Deci ieşirea este funcţia de autocorelaţie temporală a semnalului de intrare, translatată cu τ_0. Funcţia de autocorelaţie a semnalului $s(t)$ este calculată ca:

$$R_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)s(u+t)du = \begin{cases} A^2(t+T), \text{ dacă } t \in [-T;0], \\ A^2(T-t), \text{ dacă } t \in [0;T], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Atunci semnalul de ieşire $y(t)$ este:

$$y(t) = \begin{cases} kA^2(t+T+\tau_0), \text{ dacă } t \in [-T+\tau_0;\tau_0], \\ kA^2(T+\tau_0-t), \text{ dacă } t \in [\tau_0;T+\tau_0], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Dacă la intrarea filtrului se aplică semnalul de zgomot alb $\xi(t)$, la ieşirea sistemului vom obţine:

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\xi(t-\tau)d\tau = k\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_0-\tau)\xi(t-\tau)d\tau =$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty} s(u)\xi(t-\tau_0+u)du = kA\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t-\tau_0+u)du.$$

Acest semnal de ieşire este o variantă mediată a semnalului de intrare (mediere realizată pe perioada T). Cu cât T va creşte, acest semnal de ieşire se va apropia de media temporală a zgomotului alb de intrare, deci de 0.

■

Exemplul 8.3 *La intrarea unui filtru trece jos realizat cu o celulă de filtrare RC se aplică un zgomot de bandă largă (proces aleator cu densitatea spectrală de putere constantă în intervalul de frecvenţă $[-\omega_0; \omega_0]$ şi nulă în rest), staţionar. Să se calculeze (aproximativ) densitatea spectrală de putere şi funcţia de autocorelaţie a zgomotului filtrat în cazurile în care banda filtrului este mult mai mare, respectiv mult mai mică decât banda zgomotului.*

Rezolvare: Celula de filtrare RC este un divizor de tensiune format dintr-un rezistor de rezistenţă R şi un condensator de capacitate C înseriate; semnalul de intrare se aplică întregii grupări serie; semnalul de ieşire se culege de pe condensator. Funcţia de transfer în frecvenţă a filtrului este:

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Modulul pătrat al funcţiei de transfer este atunci:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Frecvenţa de tăiere ω_T a filtrului este definită ca frecvenţa la care puterea la ieşirea filtrului este jumătate din puterea de intrare; puterea la ieşire este proporţională cu puterea la intrare prin modulul pătrat al funcţiei de transfer a filtrului, şi atunci:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \omega_T RC = 1 \Longleftrightarrow \omega_T = \frac{1}{RC}.$$

Zgomotul alb aplicat la intrarea filtrului are o densitate spectrală de putere descrisă de:

$$q_\xi(\omega) = \begin{cases} k, \text{ dacă } \omega \in [-\omega_0; \omega_0], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieşirea filtrului este dată de (8.2), adică:

$$q_\eta(\omega) = q_\xi(\omega) \left|H(\omega)\right|^2.$$

Cazul I: dacă banda de trecere a filtrului este mult mai mare ca banda zgomotului, adică $\omega_T \gg \omega_0$, putem aproxima funcţia de transfer a filtrului pe intervalul $[-\omega_0; \omega_0]$ cu 1:

$$|H(\omega)|^2 \big|_{\omega \in [-\omega_0; \omega_0]} \simeq |H(0)|^2 = 1,$$

şi atunci:

$$q_\eta(\omega) = q_\xi(\omega), \text{ şi deci } B_\eta(\tau) = B_\xi(\tau).$$

$$B_\xi(\tau) = \text{Fourier}^{-1}\{q_\xi(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_\xi(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega = \frac{k}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{-j\omega\tau} d\omega =$$

$$= \frac{k\omega_0}{\pi} \operatorname{Si}(\omega_0 \tau).$$

Cazul II: dacă banda de trecere a filtrului este mult mai mică ca banda zgomotului, adică $\omega_0 \gg \omega_T$, putem aproxima:

$$q_\eta(\omega) = q_\xi(\omega)\,|H(\omega)|^2 \simeq k\,|H(\omega)|^2 = \frac{k}{1+(\omega RC)^2};$$

$$q_\eta(\omega) = \frac{k}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right)^2} = \frac{k\omega_T}{2}\left(\frac{1}{j\omega+\omega_T} - \frac{1}{j\omega-\omega_T}\right).$$

Calculul transformatei Fourier inverse a acestei funcţii se face prin intermediul transformatei Laplace bilaterale (înlocuind formal $j\omega = s$) şi conduce la:

$$B_\xi(\tau) = \frac{k\omega_T}{2}\left(U(\tau)e^{-\tau\omega_T} + U(-\tau)e^{\tau\omega_T}\right) = \frac{k\omega_T}{2}e^{-|\tau|\omega_T} = \frac{k}{2RC}e^{-|\tau|\omega_T}.$$

■

8.2 Probleme propuse

Tema 8.1 *Un filtru trece jos ideal are funcţia de transfer* $H(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } |\omega| \leqslant \frac{\pi}{2T}, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$.
La intrarea filtrului se aplică o secvenţă de variabile aleatoare (procesul aleator de timp discret) necorelate de medie nulă şi varianţă σ^2, $\xi(n)$. *La ieşirea filtrului se obţine secvenţa de variabile aleatoare (procesul aleator de timp discret)* $\eta(n)$. *Să se calculeze şi să se reprezinte grafic funcţiile de autocorelaţie şi de densitate spectrală de putere a intrării şi ieşirii filtrului. Să se calculeze puterea medie a semnalului de la ieşirea filtrului.*

Tema 8.2 *Un filtru are funcţia de transfer* $H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\cos\pi\frac{f}{f_0}\right), & \text{dacă } |f| \leqslant f_0, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$;
la intrarea acestui filtru se aplică semnalul aleator a cărui funcţie de autocorelaţie este $B_\xi(\tau) = \alpha\,\mathrm{Si}\,\omega_1\tau + \beta\cos\omega_2\tau + \gamma$. *Să se calculeze funcţia de densitate spectrală de putere a semnalului de la ieşirea filtrului, componenta continuă şi varianţa acestuia. Să se calculeze valoarea efectivă a semnalului de ieşire pentru* $f_0 = 25$ *Hz.*

Tema 8.3 *Un semnal este distribuit uniform simetric în jurul valorii* 0*; varianţa* σ_x^2 *a procesului este necunoscută şi se determină prin schema de măsurare formată din blocuri succesive: un redresor bialternanţă cu factor de amplificare* K *urmat de un bloc de calcul a componentei continue* $\left(\lim\limits_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T y(t)dt\right)$. *Care este relaţia dintre mărimea măsurată* M *şi funcţia de densitate de probabilitate a semnalului redresat,* $f_y(y,t)$ *? Ce valoare trebuie să aibă constanta* K *pentru ca* $M = \sigma_x^2$ *? Care este eroarea de măsurare după aceată schemă a varianţei unui semnal gaussian de medie nulă; în acest caz valoarea măsurată este mai mare sau mai mică decât valoarea reală ? Cum se poate calcula* σ_x^2 *din funcţia de autocorelaţie; în acest caz rezultatul este influenţat de distribuţia particulară a semnalului ?*

Tema 8.4 *Ieşirea unui sistem liniar, $y(t)$, este determinată în funcţie de semnalul de intrare, $x(t)$:*

$$y(t) = kx(t) + x(t - t_0).$$

Dacă semnalul de intrare $x(t)$ este distribuit gaussian în jurul valorii nule şi are densitatea spectrală de putere $q_x(\omega) = Q_0 \,\mathrm{Si}^2\left(\frac{\omega}{2B}\right)$, care este densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieşirea sistemului ? Ce semnal de ieşire se obţine pentru $k = -1$ şi $t_0 = \frac{1}{B}$?

Tema 8.5 *Ieşirea unui sistem liniar, $y(t)$, este determinată în funcţie de semnalul de zgomot de intrare, $x(t)$:*

$$y(t) = x(t - t_1) + ax(t - t_2).$$

Funcţia de autocorelaţie a semnalului aleator $x(t)$ este $B_x(\tau) = \mathrm{Si}\,(\omega\tau)$. Care este funcţia de intercorelaţie intrare-ieşire şi densitatea spectrală de putere de intercorelaţie intrare-ieşire ? Ce se obţine pentru $a = 0.3$, $t_1 = 0.1$ s şi $t_2 = 0.15$ s ?

Tema 8.6 *Un proces aleator staţionar $\xi(t)$ cu funcţia de autocorelaţie statistică $B_\xi(\tau) = \cos(2\pi 10^3 \tau) + e^{-100|\tau|}$, cu $\tau \in R$ se aplică la intrarea unui filtru trece bandă ideal, acordat pe frecvenţa de 1 kHz şi cu banda de trecere de 100 Hz. Fie $\eta(t)$ rezultatul filtrării lui $\xi(t)$. Să se calculez puterea medie şi densitatea spectrală de putere a semnalului aleator $\xi(t)$; să se calculeze (cu o cât mai bună aproximare) densitatea spectrală de putere şi funcţia de autocorelaţie pentru semnalul de la ieşirea filtrului trece bandă.*

Tema 8.7 *Se dă un filtru adaptat la semnalul $s(t) = \begin{cases} A, \text{ dacă } t \in [0;T], \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$. Să se determine răspunsul filtrului la semnalele de intrare $s(t)$ şi $\xi(t)$ (unde $\xi(t)$ este un semnal aleator de tip zgomot alb).*

Tema 8.8 *Două celule RC de filtrare trece jos sunt cascadate, iar la intrarea primei celule se aplică un zgomot alb. Să se calculeze densitatea spectrală de putere şi funcţia de autocorelaţie a semnalului de ieşire şi să se studieze influenţa constantei RC a filtrului asupra proprietăţilor statistice ale semnalului de ieşire.*

Tema 8.9 *Modulul funcţiei de transfer a unui filtru discret este de formă triunghiulară, simetrică, maximă în origine; valorile nenule ale acestei funcţii sunt $|H(0)|^2 = 1$, $|H(1)|^2 = 0.5$, $|H(2)|^2 = 0.25$. Dacă la intrarea acestui filtru se aplică un semnal (de timp discret) a cărui funcţie de autocorelaţie este $B(k) = 2^{-k}$, să se determine funcţia de autocorelaţie şi densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieşirea filtrului.*

Capitolul 9

Spaţii de reprezentare a semnalelor

Să considerăm eşantioanele la momentele nT_0 ale realizării particulare a unui proces aleator $x(t)$; acestea vor fi $x(n)$ şi vor forma un proces aleator de timp discret. Un număr de N eşantioane ale procesului aleator discret pot fi grupate într-un vector coloană, $\mathbf{x} = (x(0), x(1), ..., x(N-1))^T$. Considerând o bază de funcţii (de timp discret) de N eşantioane $\{\varphi_i(n)\}_{i=\overline{0,N-1}}$, proiecţiile pe acestea ale procesului aleator formează o descompunere a acestuia:

$$x(n) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \varphi_i(n), \tag{9.1}$$

unde coeficienţii y_i sunt produsul scalar al vectorului $\mathbf{x}$ al procesului aleator cu funcţiile bazei:

$$y_i = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\varphi_i(n) = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \tag{9.2}$$

Acestă ultimă relaţie (care prezintă obţinerea coeficienţilor cu care se face reprezentarea procesului aleator în noul spaţiu definit de baza de funcţii) mai poate fi scrisă sub formă matricială şi ca:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9.3}$$

şi poartă numele de transformare a vectorului (procesului aleator) $\mathbf{x}$. Matricea $\mathbf{A}$ a transformării este definită de:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varphi_0(0) & \varphi_0(1) & ... & \varphi_0(N-1) \\ \varphi_1(0) & \varphi_1(1) & ... & \varphi_1(N-1) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_{N-1}(0) & \varphi_{N-1}(1) & ... & \varphi_{N-1}(N-1) \end{pmatrix}$$

9.1 Transformări unitare

Transformarea definită de matricea $\mathbf{A}$ se numeşte unitară dacă matricea $\mathbf{A}$ este hermitică, adică inversa sa este conjugata transpusei:

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^T)^* \tag{9.4}$$

În acest caz, transformarea inversă se poate scrie:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T)^* \mathbf{y} \tag{9.5}$$

Interesul deosebit ce se acordă transformărilor unitare este justificat de următoarele proprietăţi ale acestora:

- energia procesului (semnalului) transformat se conservă:

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

  (aceasta înseamnă că transformarea unitară este o rotaţie în spaţiul n-dimensional, deoarece conservă lungimea geometrică euclidiană a vectorilor)

- transformarea unitară comută cu operatorul de mediere statistică:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}$$

- transformarea unitară conservă entropia semnalului
- transformarea unitară realizează o decorelare a componentelor din spaţiul de bază (iniţial) al semnalului şi o concentrare a energiei în spaţiul transformat pe un număr mai mic de elemente.

9.2 Probleme rezolvate

Exemplul 9.1 *Să se demonstreze proprietatea transformărilor unitare de conservare a energiei.*

Rezolvare: În rezolvare vom folosi definiţia transformării (9.3) şi caracteristica transformărilor unitare (9.4):

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} y^2(n) = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{*T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{A}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 .$$

■

Exemplul 9.2 *Să se găsească relaţia dintre matricea de covariaţie a procesului aleator iniţial şi a celui transformat printr-o transformare unitară.*

Rezolvare: Matricea de covariaţie a unui proces aleator de timp discret este definită ca[1]:

$$\mathbf{C_x} = \overline{(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})^{*T}} = \mathbf{R_x} - \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{x}}^{*T},$$

[1] Conjugarea complexă a vectorilor reprezentând procese aleatoare se foloseşte pentru cazul general al proceselor aleatoare de valori complexe; notaţia nu mai este necesară dacă procesul aleator are numai valori reale.

unde:

$$\mathbf{R_x} = \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}^{*T}} = \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(1) & ... & R_x(N-1) \\ R_x(-1) & R_x(0) & ... & R_x(N-2) \\ ... & ... & ... & ... \\ R_x(1-N) & ... & R_x(-1) & R_x(0) \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

(deci matricea de corelaţie are pe diagonale valorile funcţiei de autocorelaţie a procesului aleator; dacă componentele $x(n)$ sunt variabile aleatoare şi nu eşantioane ale unui proces aleator, atunci pe diagonala principală matricea de covariaţie a vectorului $\mathbf{x}$ are varianţele respectivelor variabile aleatoare).

Pentru procesul aleator transformat $\mathbf{y}$ avem:

$$\mathbf{C_y} = \overline{(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}})^{*T}} = \overline{(\mathbf{Ax}-\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{Ax}-\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}})^{*T}} = \overline{\mathbf{A}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^{*T}\mathbf{A}^{*T}} =$$

$$= \mathbf{A}\overline{(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^{*T}}\mathbf{A}^{*T} = \mathbf{A}\mathbf{C_x}\mathbf{A}^{*T}.$$

■

Exemplul 9.3 *Să se demonstreze proprietatea de conservare a entropiei proceselor aleatoare printr-o transformare unitară.*

Rezolvare: Entropia unui proces aleator (vector ale cărui componente sunt variabile aleatoare) este dată de:

$$H(\mathbf{x}) = \frac{N}{2}\log_2(2\pi e\,|\mathbf{C_x}|^{\frac{1}{N}}).$$

Dacă $\mathbf{y}$ este procesul transformat prin transformarea unitară definită de matricea $\mathbf{A}$ atunci entropia acestuia este:

$$H(\mathbf{y}) = \frac{N}{2}\log_2(2\pi e\,|\mathbf{C_y}|^{\frac{1}{N}}) = \frac{N}{2}\log_2(2\pi e\,\left|\mathbf{A}\mathbf{C_x}\mathbf{A}^{*T}\right|^{\frac{1}{N}}) =$$

$$= \frac{N}{2}\log_2(2\pi e\,|\mathbf{A}|^{\frac{1}{N}}\,|\mathbf{C_x}|^{\frac{1}{N}}\,\left|\mathbf{A}^{*T}\right|^{\frac{1}{N}}) = \frac{N}{2}\log_2(2\pi e(|\mathbf{A}|\,\left|\mathbf{A}^{-1}\right|)^{\frac{1}{N}}\,|\mathbf{C_x}|^{\frac{1}{N}}) = H(\mathbf{x})$$

pentru că, conform (9.4):

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{*T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_N,$$

de unde rezultă:

$$|\mathbf{A}|\,\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = |\mathbf{I}_N| = 1.$$

■

Exemplul 9.4 *Un vector* $\mathbf{x}$ *are două componente, variabile aleatoare de medie nulă; matricea de covariaţie a vectorului* $\mathbf{x}$ *este* $\mathbf{C_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$*; vectorul este transformat prin transformarea caracterizată de matricea* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$*. Să se verifice că transformarea este unitară, că energia este conservată şi să se studieze proprietatea de concentrare a energiei şi decorelare a componentelor în urma transformării.*

Rezolvare: Demonstrarea faptului că transformarea este unitară se face prin verificarea relaţiei (9.4):

$$\mathbf{A}^{*T} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^{*T} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^{*T}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{*T}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Energia conţinută în vectorul $\mathbf{x}$ este$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{1} x^2(n) = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{x}$, adică este urma[2] ("trace") matricii de covariaţie $\mathbf{C_x}$. Matricea de covariaţie a vectorului transformat este:

$$\mathbf{C_y} = \mathbf{A}\mathbf{C_x}\mathbf{A}^{*T} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0.45\sqrt{3} & 0.45 \\ 0.45 & 1-0.45\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Urmele celor două matrici de covariaţie sunt:

$$\|\mathbf{y}\|^2 = 1 + 0.45\sqrt{3} + 1 - 0.45\sqrt{3} = 2 = 1 + 1 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Elementele de pe diagonala secundară a matricii de covariaţie reprezintă evident covariaţia dintre componentele vectorului; se observă că valoarea acesteia este mai mică (0.45) după transformare decât în vectorul iniţial (0.9). În acelaşi timp, în vectorul iniţial energia era distribuită uniform pe componente, iar după transformare, prima componentă are un procent de $(1+0.45\sqrt{3})/2 = 88.97\%$ din energia totală (deci energia a fost concentrată în prima componentă).

■

9.3 Probleme propuse

Tema 9.1 *Un vector* $\mathbf{x}$ *are două componente, variabile aleatoare de medie nulă; matricea de covariaţie a vectorului* $\mathbf{x}$ *este* $\mathbf{C_x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ *(cu* $|\rho| \leqslant 1$*); vectorul este transformat prin transformarea caracterizată de matricea* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$*. Să se verifice că energia este conservată şi să se studieze proprietatea de concentrare a energiei şi decorelare a componentelor în urma transformării.*

Tema 9.2 *Să se arate că modulul determinantului unei matrici unitare este 1; să se arate că toţi vectorii proprii ai unei matrici unitare au modulul 1.*

Tema 9.3 *Un vector* $\mathbf{x}$ *are două componente, variabile aleatoare de medie nulă; matricea de covariaţie a vectorului* $\mathbf{x}$ *este* $\mathbf{C_x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ *(cu* $|\rho| \leqslant 1$*); vectorul este transformat*

[2] Urma unei matrici este suma elementelor de pe diagonala principală a matricii.

prin transformarea caracterizată de matricea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$*. Să se verifice că energia este conservată şi să se studieze proprietatea de concentrare a energiei şi decorelare a componentelor în urma transformării. Să se găsească valoarea lui* θ *pentru care concentrarea de energie este maximă şi valoarea lui* θ *pentru care componentele vectorului transformat devin decorelate.*

Tema 9.4 *Un vector* $\mathbf{x}$ *are trei componente, variabile aleatoare de medie nulă; matricea de covariaţie a vectorului* $\mathbf{x}$ *este* $\mathbf{C_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \rho & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(cu* $|\rho| \leqslant 1$*); vectorul este transformat prin transformarea caracterizată de matricea* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$*. Să se verifice că transformarea este unitară, că energia este conservată şi să se studieze proprietatea de concentrare a energiei şi decorelare a componentelor în urma transformării. În ce condiţii se obţine decorelarea totală a componentelor vectorului în urma transformării ?*

Tema 9.5 *Un vector* $\mathbf{x}$ *are trei componente, variabile aleatoare de medie nulă; matricea de covariaţie a vectorului* $\mathbf{x}$ *este* $\mathbf{C_x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(*$|\rho| \leqslant 1$*); vectorul este transformat prin transformarea caracterizată de matricea* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$*. Să se verifice că transformarea este unitară, că energia este conservată şi să se studieze proprietatea de concentrare a energiei şi decorelare a componentelor în urma transformării. În ce condiţii se obţine o concentrare maximă de energie în prima componentă a vectorului transformat ?*

Tema 9.6 *O transformare unitară este caracterizată de matricea*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -\sqrt{2}b & \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{a}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Transformarea se aplică unui vector $\mathbf{x}$*, ale cărui componente sunt variabile aleatoare de medie nulă, varianţe unitare şi coeficienţi de intercorelaţie egali. Care trebuie să fie valorile constantelor* a*,* b *şi* c *pentru ca în urma transformării variabilele aleatoare să fie decorelate ?*

Varianta A

NOTAŢII UTILIZATE

ξ : variabilă aleatoare cu valori reale

$P\{\}$: probabilitatea unui eveniment

Ω : mulţimea evenimentelor elementare; câmp complet de evenimente

F_ξ : funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ

$F_\xi(x)$: valoarea funcţiei de repartiţie a variabilei aleatoare ξ în punctul x

f_ξ : funcţia de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare ξ

$f_\xi(x)$: valoarea funcţiei de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare ξ în punctul x

$m_\xi^{(k)}$: momentul statistic [necentrat] de ordinul k al variabilei aleatoare ξ

m_k : momentul statistic [necentrat] de ordinul k al variabilei aleatoare curente

$M_\xi^{(k)}$: momentul statistic centrat de ordinul k al variabilei aleatoare ξ

M_k : momentul statistic centrat de ordinul k al variabilei aleatoare curente

k : ordinul momentului statistic

σ_ξ^2 : varianţa variabilei aleatoare ξ

σ^2 : varianţa variabilei aleatoare curente

μ_ξ : media statistică a variabilei aleatoare ξ

μ : media statistică a variabilei aleatoare curente

$\overline{}$: operatorul de mediere statistică

$N(\mu, \sigma^2)$: distribuţie normală de medie μ şi varianţă σ^2

$\delta(x)$: distribuţia (impulsul) Dirac (delta) unidimensională

$U(x)$: funcţia treaptă unitate

$\mathrm{Si}(x) = \frac{\sin x}{x}$: funcţia sinus cardinal

$\delta(x, y)$: distribuţia (impulsul) Dirac (delta) bidimensională

η : variabilă aleatoare cu valori reale (în general ca rezultat al transformării variabilei aleatoare ξ)

$f_{\xi\eta}$: funcţia de densitate de probabilitate de ordinul doi [a perechii de variabile aleatoare ξ, η]

$f_{\xi\eta}(x, y)$: valoarea funcţiei de densitate de probabilitate de ordinul doi [a perechii de variabile aleatoare ξ, η] în punctul (x, y)

$F_{\xi\eta}$: funcţia de repartiţie de ordinul doi a [perechii de variabile aleatoare ξ, η]

$F_{\xi\eta}(x, y)$: valoarea funcţiei de repartiţie de ordinul doi [a perechii de variabile aleatoare ξ, η] în punctul (x, y)

$B_{\xi\eta}$: corelaţia variabilelor aleatore ξ şi η

$K_{\xi\eta}$: covariaţia variabilelor aleatore ξ şi η

$\rho_{\xi\eta}$: coeficientul de corelaţie a variabilelor aleatore ξ şi η

$\xi(t)$: proces aleator cu valori reale

$F_{\xi}(x, t)$: valoarea funcţiei de repartiţie a procesului aleator ξ în punctul x

$f_{\xi}(x, t)$: valoarea funcţiei de densitate de probabilitate a procesului aleator ξ în punctul x

$F_{\xi}(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n)$: funcţia de repartiţie de ordinul n a procesului aleator ξ

$f_{\xi}(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n)$: funcţia de densitate de probabiltate de ordinul n a procesului aleator ξ

$\widetilde{\ }$: operatorul de mediere temporală (pentru un semnal sau proces aleator)

$B_{\xi\eta}(t_1, t_2)$: funcţia de corelaţie statistică a proceselor aleatoare ξ şi η

$R_{\xi\eta}(\tau)$: funcţia de corelaţie temporală a proceselor aleatoare ξ şi η

$B_{\xi}(t_1, t_2)$: funcţia de autocorelaţie statistică a procesului aleator ξ

$B_{\xi}(\tau)$: funcţia de autocorelaţie statistică a procesului aleator staţionar ξ

Fourier$\{\}$, Fourier$^{-1}\{\}$: transformata Fourier, respectiv transformata Fourier inversă

$q_{\xi}(\omega)$: densitatea spectrală de putere a procesului aleator ξ

$*$: operatorul de convoluţie liniară

$\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$: matricea A, respectiv determinantul matricii A

$\mathbf{x}$: vectorul x (realizarea procesului aleator de timp discret $x(n)$ cu N eşantioane)

$\mathbf{C_x}$: matricea de covariaţie a procesului aleator de timp discret $x(n)$

$\mathbf{R_x}$: matricea de corelaţie a procesului aleator de timp discret $x(n)$

$\mathbf{I}_N$: matricea unitară de ordin N

Bibliografie selectivă

[1] H. Marko: *Aufgabensammlung zur Vorlesung "Statistische Methoden der Nachrichtentechnik 1"*, T.U. München,1992

[2] A. T. Murgan, I. Spânu, I. Gavăt, I. Sztojanov, V. E. Neagoe, A. Vlad: *Teoria Transmisiunii Informaţiei - probleme*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

[3] A. T. Murgan, R. Dogaru, C. Comăniciu: *Teoria Transmisiunii Informaţiei: detecţia, estimarea şi filtrarea semnalelor aleatoare. Lucrări practice.*, Ed. POLITEHNICA Bucureşti, 1995

[4] A. Spătaru: *Teoria Transmisiunii Informaţiei*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983