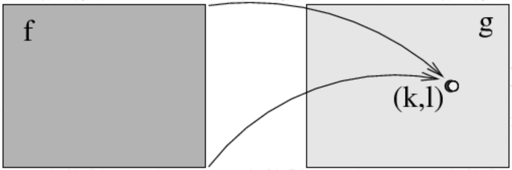
Procesarea Imaginilor

TRANSFORMĂRI UNITARE

Mihai Ivanovici

Universitatea Transilvania din Brașov

1 Prelucrări integrale



$$g(k,l) = \varphi[\int_k \int_l f(k,l)]$$

Transformările unitare = prelucrări de tip integral (la calculul noii valori a unui pixel al imaginii transformate contribuind valorile tuturor pixelilor din imaginea originală)

Transformarea se referă la o clasă de matrici unitare folosite pentru reprezentarea imaginilor într-o bază (de imagini)

O matrice A de dimensiune $N \times N$ este unitară dacă inversa ei este matricea A^{*T}

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{*T} = A^{*T} \cdot A = I_N$$

unde * reprezintă operația de complementare în mulțimea numerelor complexe, ^{T} reprezintă operația de transpunere a unei matrici, iar I_N este matricea identitate de dimensiune $N \times N$:

$$I_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru un vector uni-dimensional $\underline{u}$ de dimensiune N, de forma:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u(N-1) \end{bmatrix} = [u(0), u(1), ..., u(N-1)]^T$$

se numește **transformare unitară directă** relația:

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k,n) \cdot u(n), \quad 0 \leq k \leq N-1 \qquad (1)$$

unde $v(k)$ reprezintă elementele vectorului transformat $\underline{v}$, iar $a(k,n)$ sînt elementele matricii A.

Matricial această relaţie se poate scrie astfel:

$$\underline{v} = A \cdot \underline{u}$$

Transormarea unitară inversă este dată de relaţia:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot a^*(k,n), \quad 0 \le n \le N-1$$

care se scrie matricial astfel:

$$\underline{u} = A^{*T} \cdot \underline{v}$$

2 Transformări unitare bidimensionale

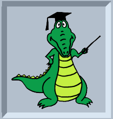
Pentru o imagine $u(m,n)$, de dimensiune $N \times N$, transformarea directă are următoarea formă:

$$v(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m,n) \cdot a_{k,l}(m,n), \quad 0 \leq k,l \leq N-1$$

iar transformarea inversă:

$$u(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} v(k,l) \cdot a^{*}_{k,l}(m,n), \quad 0 \leq m,n \leq N-1$$

unde coeficienții $\{a_{k,l}(m,n)\}$ poartă numele de **transformare unitară bidimensională**, și reprezintă *un*



set de matrici de bază ortonormale, iar $v(k,l)$ reprezintă transformata imaginii $u(m,n)$.

Aceste matrici de bază respectă condiția de **ortonormalitate**:

$$\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n)\cdot a^{*}_{k',l'}(m,n) = \delta(k-k',l-l')$$

$$\delta(k-k',l-l') = \begin{cases} 1, & k=k' \;\&\; l=l', \\ 0, & \hat{\imath}n\ rest. \end{cases}$$

pentru $\forall k,l$.

O astfel de transformare este caracterizată de N^4 coeficienți $a_{k,l}(m,n)$.

Pentru calculul unui singur element este nevoie de N^2 înmulțiri $\Longrightarrow$ complexitatea este $O(N^4)$ (putând fi redusă la $O(N^3)$ dacă transformarea este *separabilă*)

Full Screen
Search
Close

O transformare este **separabilă**, dacă elementele $a_{k,l}(m,n)$ ce o definesc pot fi scrise ca produs de alte două elemente, grupate după perechi de indici

$$a_{k,l}(m,n) = a_k(m) \cdot b_l(n) = a(k,m) \cdot b(l,n)$$

unde, matricile $A = \{a(k,m)\}$ și $B = \{b(l,n)\}$ trebuie să fie la rândul lor unitare, adică:

$$A \cdot {A^*}^T = {A^*}^T \cdot A = I_N \qquad B \cdot {B^*}^T = {B^*}^T \cdot B = I_N$$

În ipoteza separabilității relațiile anterioare devin:

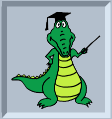
$$v(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a(k,m) \cdot u(m,n) \cdot b(l,n)$$

$$u(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a^*(k,m) \cdot v(k,l) \cdot b^*(l,n)$$

Matrial se poate scrie:

$$V = A \cdot U \cdot B^T$$

$$U = A^{*T} \cdot V \cdot B^*$$



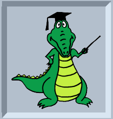
unde $U=\{u(m,n)\}$ reprezintă imaginea originală, iar $V=\{v(k,l)\}$ reprezintă imaginea transformată.

În practică se folosesc numai transformări separabile, pentru care, în plus, se alege $B=A$

În acest caz, vom avea o singură matrice A unitară care definește transfomarea

$$v(k,l)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}a(k,m)\cdot u(m,n)\cdot a(l,n)$$

$$u(m,n)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}a^{*}(k,m)\cdot v(k,l)\cdot a^{*}(l,n)$$



Matricial:

$$V = A \cdot U \cdot A^T$$

$$U = A^{*T} \cdot V \cdot A^*$$

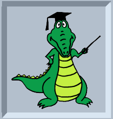
Proprietățile transformărilor unitare

O transformare unitară conservă energia semnalului

Energia semnalului $\underline{u}$ este dată de norma la pătrat a spațiului în care este reprezentat semnalul:

$$E_v = \|\underline{v}\|^2 = \underline{v}^{*T} \cdot \underline{v} = (A\underline{u})^{*T} \cdot A\underline{u} =$$
$$\underline{u}^{*T} A^{*T} A\underline{u} = \underline{u}^{*T} \cdot \underline{u} = \|\underline{u}\|^2 = E_u$$

În general transformarea se alege astfel încât energia să fie inegal distribuită în spațiul transformatei, chiar dacă ea era uniform distribuită în spațiul original.



Entropia unui semnal discret cu valori aleatoare se conservă printr-o transformare unitară (se păstrează informaţia conţinută în semnal)

Coeficienţii în spaţiul transformatei sunt decorelaţi sau aproape decorelaţi

Transformata optimă care compactează maximum de energie într-un număr dat de coeficienţi şi care în acelaşi timp decorelează complet aceşti coeficienţi, este transformarea Karhunen-Loève.

3 Transformata Fourier discretă

Transformata Fourier unidimensională

Pentru un semnal unidimensional $\underline{u}$ de dimensiune N, transformarea Fourier directă este dată de relația:

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cdot e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} \quad \forall k = 0..N-1$$

iar transformarea Fourier inversă de relația:

$$u(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot e^{\frac{2\pi jkn}{N}} \quad \forall n = 0..N-1$$

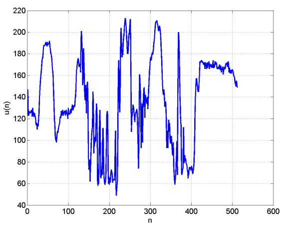
Full Screen
Search
Close

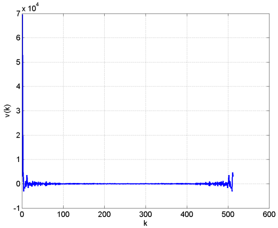
Astfel definită, transformarea Fourier nu este unitară. Următoarele relații definesc transformarea Fourier unitară, directă și inversă:

$$v(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cdot e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} \quad \vee\, k = 0..N-1$$

$$u(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot e^{\frac{2\pi jkn}{N}} \quad \vee\, n = 0..N-1$$

Full Screen
Search
Close





Dacă definim matricea $F = \{f(k,n)\}$ a transformării, având elementele:

$$f(k,n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} \quad k,n = 0..N-1$$

atunci transformarea Fourier se poate scrie matricial astfel:

$$\underline{v} = F \cdot \underline{u}$$

$$\underline{u} = F^* \cdot \underline{v}$$

Matricea F are proprietate că $F = F^T$.

Transformarea Fourier bidimensională

Fie o imagine $U = \{u(m,n)\}_{m,n=0..N-1}$, de dimensiune $N \times N$. Imaginea transformată Fourier $V = \{v(k,l)\}_{k,l=0..N-1}$, în ipoteza separabilității:

$$v(k,l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m,m) \cdot e^{-\frac{2\pi j(km+ln)}{N}}$$

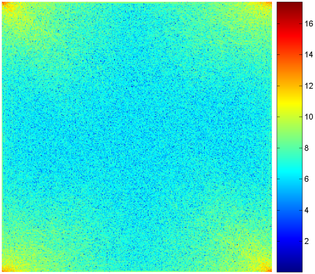
iar transformarea Fourier inversă este:

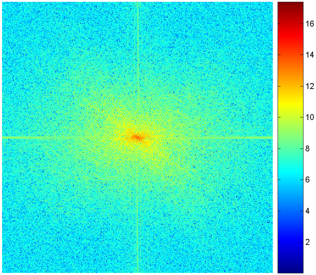
$$u(m,n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k,l) \cdot e^{\frac{2\pi j(km+ln)}{N}}$$

Matricial:

$$V = F \cdot U \cdot F$$

$$U = F^{*} \cdot V \cdot F^{*}$$





Full Screen
Search
Close

4 Transformata cosinus discretă

Transformata cosinus este o transformată unitară separabilă, definită de matricea $C = \{c(k,n)\}$

$$c(k,n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & k = 0, 0 \le n \le N-1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} cos \frac{(2n+1)\pi k}{2N}, & 1 \le k \le N-1, 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Transformata cosinus, directă și inversă, pentru un semnal unidimensional, este dată de relațiile:

$$v(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} u(n) cos \frac{(2n+1)\pi k}{2N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$u(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(k) v(k) cos \frac{(2n+1)\pi k}{2N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

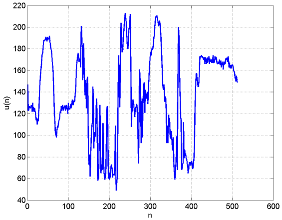
unde

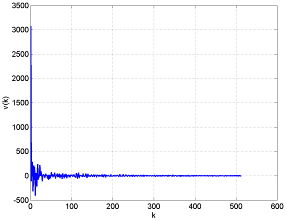
$$\alpha(0) = \sqrt{\frac{1}{N}}, \quad \alpha(k) = \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad 1 \leq k \leq N-1$$

Full Screen

Search

Close





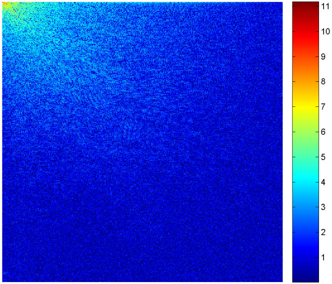
$$V = C \cdot U \cdot C^T$$

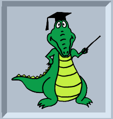
$$U = C^T \cdot U \cdot C$$

Matricea C are proprietatea că $C = C^*$, elementele sale fiind numere reale

Full Screen
Search
Close

Transformarea cosinus nu este partea reală a transformării Fourier



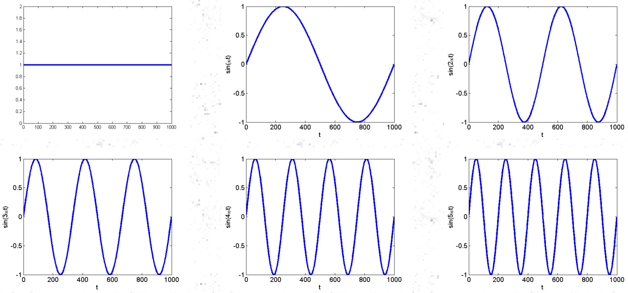


5 Transformata sinus discretă

Transformata sinus este o transformată unitară separabilă, definită de matricea $S = \{s(k,n)\}$

$$s(k,n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} sin \frac{(k+1)(n+1)\pi}{N+1}, \;\; 0 \le k,n \le N-1$$

Baza de funcții sinus:



Relațiile ce definesc transformarea sinus unidimensională, directă și inversă, sunt următoarele:

$$v(k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) sin \frac{(k+1)(n+1)\pi}{N+1}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Full Screen
Search
Close

$$u(n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) sin \frac{(k+1)(n+1)\pi}{N+1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Matricial:

$$V = S \cdot U \cdot S$$
$$U = S \cdot V \cdot S$$

Matricea S are proprietatea că $S = S^* = S^T = S^{-1}$

Transformarea sinus nu este partea imaginară a transformării Fourier

Full Screen
Search
Close

6 Transformata Hadamard

Elementele bazei de vectori ce caracterizează transformata Hadamard iau valori binare $\pm 1 \Longrightarrow$ transformata Hadamard e mai potrivită pentru analiza semnalelor digitale

Matricile H_n ale transformatei Hadamard sunt matrici de dimensiune $N \times N$, unde N este o putere a lui 2, $N = 2^n, n = 1, 2, 3...$, și sunt generate pornind de la *matricea de bază*:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

folosind recurența produsului Kronecker:

$$H_n = H_{n-1} \otimes H_1 = H_1 \otimes H_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix}$$

De exemplu, pentru n = 3, matricile Hadamard vor fi:

$$H_3 = H_1 \otimes H_2$$

$$H_2 = H_1 \otimes H_1$$

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Matricial, transformata Hadamard unidimensională a unui vector $\underline{u}$, de dimensiune $N \times 1$, este un vector $\underline{v}$:

$$\underline{v} = H\underline{u}$$

iar transformarea inversă:

$$\underline{u} = H\underline{v}$$

unde $H = H_n$, iar $n = log_2 N$.

Formele explicitate ale acestor relații sunt următoarele:

$$v(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} u(m)(-1)^{b(k,m)}, \quad 0 \le k \le N-1$$

$$u(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k)(-1)^{b(k,m)}, \quad 0 \le m \le N-1$$

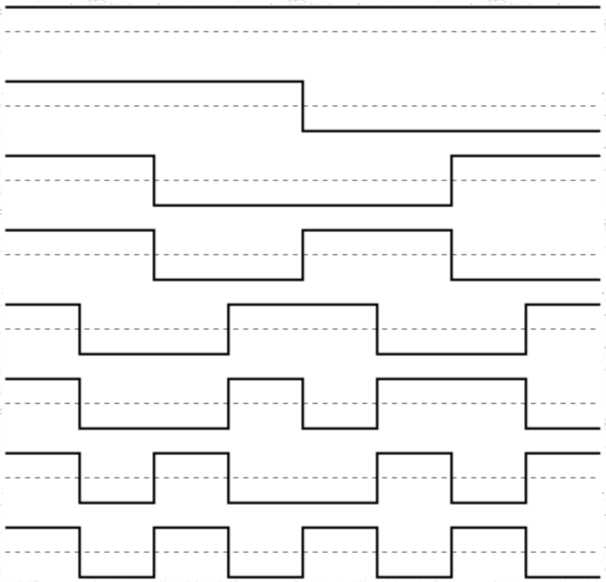
unde

$$b(k,m) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i m_i; \quad k_i, m_i = 0, 1$$

iar $\{k_i\}$, $\{m_i\}$ sunt reprezentările binare ale lui k și m:

$$\begin{cases} k = & k_0 + 2k_1 + \ldots + 2^{n-1} k_{n-1} \\ m = & m_0 + 2m_1 + \ldots + 2^{n-1} m_{n-1} \end{cases}$$

Full Screen
Search
Close



7 Transformata Haar

Funcțiile Haar $h_k(x)$ se definesc pe un interval continuu, $x \in [0,1]$, pentru $k = 0, \ldots, N-1$, unde $N = 2^n$. Numărul întreg k poate fi descompus în mod unic ca:

$$k = 2^p + q - 1$$

unde $0 \le p \le n-1$, $q = 0, 1$ pentru $p = 0$ și $1 \le q \le 2^p$ pentru $p \ne 0$.

De exemplu, pentru $N = 4$, valorile k, p și q sunt următoarele:

k	0	1	2	3
p	0	0	1	1
q	0	1	1	2

Titlul
Prelucrări integrale
Transformări unitare ...
Transformata Fourier ...
Transformata cosinus ...
Transformata sinus di ...
Transformata Hadamard
Transformata Haar
Page 34 of 37
Full Screen
Search
Close
PI 2008

Pornind de la reprezentarea numărului întreg k printr-o pereche de numere întregi (p, q), funcțiile Haar se definesc astfel:

$$h_0(x) = h_{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad x \in [0,1]$$

$$h_k(x) = h_{p,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & \frac{q-1}{2^p} \le x < \frac{q-\frac{1}{2}}{2^p} \\ -2^{p/2}, & \frac{q-\frac{1}{2}}{2^p} \le x < \frac{q}{2^p} \\ 0, & x \in [0,1] \end{cases}$$

Full Screen

Search

Close

PI 2008

Transformata Haar se obține pentru valori discrete ale lui x de tip m/N, pentru $m = 0, 1, .., N - 1$. Pentru $N = 8$, matricea H a transformării Haar este următoarea:

$$H = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$